数理化自学丛书

三 角

0124
1:2

统一书号：13171·215

定　　价：0.71 元

数理化自学丛书

三　　　角

数理化自学丛书编委会
数学编写小组编

上海人民出版社

数理化自学丛书

三　　角

数理化自学丛书编委会
数学编写小组编
（原上海科技版）

上海人民出版社出版
（上海绍兴路5号）

广西人民出版社重印

广西新华书店发行　广西民族印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 10.75　字数 235,000
1963年10月第1版　1977年11月新1版　1978年4月广西第1次印刷

统一书号：13171·215　定价：0.71 元

内 容 提 要

本书是数理化自学丛书中的一本，介绍中学三角课程的全部内容，只要具备平面几何和代数的初步知识即可阅读．本书叙述浅显易懂，对关键性问题讲解得特别详细，对于不易理解的内容适当分散，使逐步深入．书中附有大量习题可作为练习．书中用小一号字体排印的某些章节，初次阅读时如有困难，可以暂时略去．题号前附有 * 号的，是较难的题目，初学时可以暂时不做．

本书可供青年工人、知识青年、在职干部自学之用，也可供中等学校青年教师参考．

重印说明

《数理化自学丛书》是一九六六年前出版的．计有《代数》四册，《平面几何》二册，《三角》一册，《立体几何》一册，《平面解析几何》一册；《物理》四册；《化学》四册．这套书的特点是：比较明白易懂，从讲清基本概念出发，循序前进，使读者易于接受和理解，并附有不少习题供练习用．这套书可以作为青年工人、知识青年和在职干部自学之用，也可供中等学校青年教师教学参考，出版以后，很受读者欢迎．但是在“四人帮”及其余党控制上海出版工作期间，这套书横被扣上所谓引导青年走白专道路的罪名，不准出版．

英明领袖华主席和党中央一举粉碎了祸国殃民的“四人帮”．我国社会主义革命和社会主义建设进入新的发展时期．党的第十一次全国代表大会号召全党、全军、全国各族人民高举毛主席的伟大旗帜，在英明领袖华主席和党中央领导下，为完成党的十一大提出的各项战斗任务，为在本世纪内把我国建设成为伟大的社会主义的现代化强国，争取对人类作出较大的贡献，努力奋斗．许多工农群众和干部，在党的十一大精神鼓舞下，决心紧跟英明领袖华主席和党中央，抓纲治国，大干快上，向科学技术现代化进军，为实现四个现代化作出贡献，他们来信要求重印《数理化自学丛书》．根据读者的要求，我们现在在原书基础上作一些必要的修改后，重新出版这套书，以应需要．

十多年来，科学技术的发展是很快的．本丛书介绍的虽仅是数理化方面的基础知识，但对于应予反映的科技新成就方面内容，是显得不够的．同时，由于本书是按读者自学的要求编写的，篇幅上就不免有些庞大，有些部分也显得有些烦琐．这些，要请读者在阅读时加以注意．

对本书的缺点，希望广大读者批评指出，以便修订时参考．

一九七七年十一月

目　录

第一章　锐角的三角函数

§1·1　锐角的三角函数的定义

从平面几何学中，我们知道：

在直角三角形中，如果一个锐角等于 $30°$，那末这个锐角所对的直角边等于斜边的一半．换句话说，也就是，$30°$ 的角所对的直角边和斜边的比等于 $\frac{1}{2}$．这个性质同三角形的大小是没有关系的．

三角学首先要研究这样的问题：如果直角三角形的锐角不是 $30°$，而是任何其他的锐角，它的对边和斜边的比是不是也有确定的值呢？

我们来看图 1·1．在这个图中，我们看到，以 A 为端点的两条射线 AD 和 AE 组成了一个锐角．如果从 AD 上任意的点 B, B', B'', … 作 AE 的垂线 BC, $B'C'$, $B''C''$, …，那末，就得到一连串的直角三角形 ABC, $AB'C'$, $AB''C''$，等等．因为这些直角三角形有一个公共角 A，所以它们是相似的．

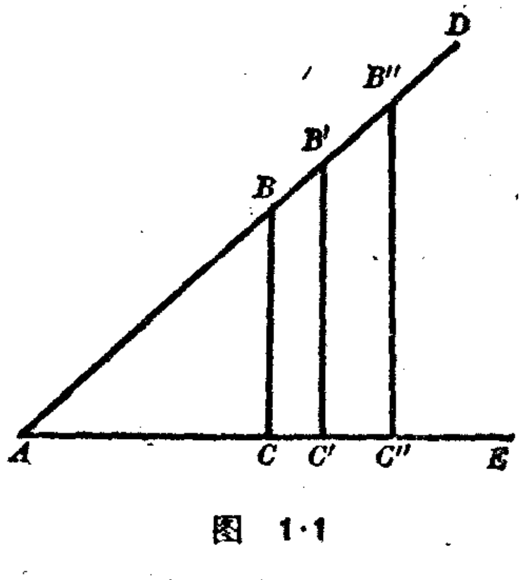


图　1·1

我们知道，相似三角形对应边的比是相等的，所以在直角

三角形 ABC 和 $AB'C'$ 中，就有

$$\frac{BC}{B'C'}=\frac{AB}{AB'},$$

因而

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}.$$

同样可以知道

$$\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}.$$

因此，

$$\frac{BC}{AB}=\frac{B'C'}{AB'}=\frac{B''C''}{AB''}=\cdots\cdots.$$

就是，在所有的直角三角形中，$\angle A$ 的对边和斜边的比都是相等的．换句话说，只要 $\angle A$ 的大小确定，那末，在用它做一个锐角画出的直角三角形中，$\angle A$ 的对边和斜边的比就是一个确定的数．

当某一个量确定的时候，和它有关的另一个量如果有确定的值，那末，我们就把第二个量叫做第一个量的函数．

例如，当正方形的边长 a 有确定的值的时候，正方形的面积 a^2 就完全确定了．这里正方形的边长是一个量，正方形的面积是另一个量．我们说，正方形的面积是边长 a 的函数．

又如，假定圆的直径用 d 表示，那末圆的周长就等于 πd．这里，圆的直径是一个量，圆的周长是另一个量．因为当圆的直径有确定的值的时候，圆的周长也就确定，所以我们说，圆的周长是直径 d 的函数．

同样，在图 1·1 中，$\angle A$ 是一个量；当这个量有确定的值的时候，在用它做锐角所画出的直角三角形中，也有一个量跟着确定了．这个量就是上面所说的对边和斜边的比．因此我们可以说，在直角三角形 ABC 中，$\angle A$ 的对边和斜边的比 $\frac{BC}{AB}$ 是 $\angle A$ 的函数．

我们要注意，正方形的面积可以根据边长 a 计算出来；圆的周长也可以根据直径 d 计算出来．所以看到算式 a^2，就知道它是 a 的函数；看到算式 πd，也就知道它是 d 的函数．但是 $\frac{BC}{AB}$ 却不能简单地用一个算式根据 $\angle A$ 的度数计算出来．为了要说明 $\frac{BC}{AB}$ 是 $\angle A$ 的函数，我们应用一个专门的记号"$\sin A$"来表示．记号"$\sin A$"读做"$\angle A$ 的正弦"．

以后看到"$\sin A$"这个记号，就应当联想到它就表示：在以 $\angle A$ 为锐角的直角三角形中，$\angle A$ 的对边和斜边的比，就是

$$\sin A=\frac{\angle A \text{ 的对边}}{\text{斜边}}.$$

为了方便，我们通常用 C 表示直角三角形 ABC 的直角，并且用小写字母 a 表示 $\angle A$ 的对边，b 表示 $\angle B$ 的对边，c 表示斜边（图 1·2）．这样就有

$$\sin A=\frac{a}{c}.$$

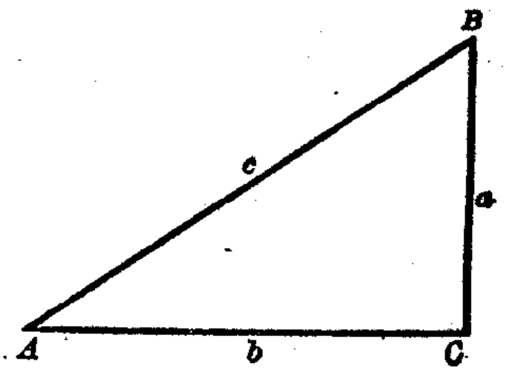


图 1·2

一个直角三角形有三条边．任意取两条可以组成六个不同的比．它们是

$$\frac{a}{c},\ \frac{b}{c},\ \frac{a}{b},\ \frac{b}{a},\ \frac{c}{b},\ \frac{c}{a}.$$

大家很容易想到，不但 $\frac{a}{c}$ 跟着 $\angle A$ 的大小而确定，其他五个比一定也是跟着 $\angle A$ 的大小而确定的．

第一个比 $\frac{a}{c}$ 已经把它叫做 $\angle A$ 的正弦了．其他五个比也都是 $\angle A$ 的函数．我们都给它们规定一个名称．现在把所

有六个函数的名称、定义和记号，一起列在下面的表里.

函数的名称	记　号①	定　义
$\angle A$ 的正弦	$\sin A$	$\sin A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\dfrac{a}{c}$
$\angle A$ 的余弦	$\cos A$	$\cos A=\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}^{②}}{\text{斜边}}=\dfrac{b}{c}$
$\angle A$ 的正切	$\operatorname{tg} A$	$\operatorname{tg} A=\dfrac{\angle A\text{ 的对边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\dfrac{a}{b}$
$\angle A$ 的余切	$\operatorname{ctg} A$	$\operatorname{ctg} A=\dfrac{\angle A\text{ 的邻边}}{\angle A\text{ 的对边}}=\dfrac{b}{a}$
$\angle A$ 的正割	$\sec A$	$\sec A=\dfrac{\text{斜边}}{\angle A\text{ 的邻边}}=\dfrac{c}{b}$
$\angle A$ 的余割	$\operatorname{cosec} A$	$\operatorname{cosec} A=\dfrac{\text{斜边}}{\angle A\text{ 的对边}}=\dfrac{c}{a}$

$\angle A$ 的所有这些函数，总起来叫做 $\angle A$ 的**三角函数**.

知道了锐角三角函数的定义以后，自然会引起下面的问题：已有了一个锐角，怎样算出它的三角函数值呢？我们举例说明如下：

例 1. 求 35° 角的三角函数值.

【解】 用量角器作一个 35° 的角A(图 1·3). 过$\angle A$的一边上任意一点 B, 例如取 $AB=10$ 厘米，向另一边作垂线 BC. 尽可能准确地量出直角三角形的其他两边的长，得$BC=5.7$厘米，$AC=8.2$厘米. 于是，我们就可把测量和计算的结果写成下面的形式：

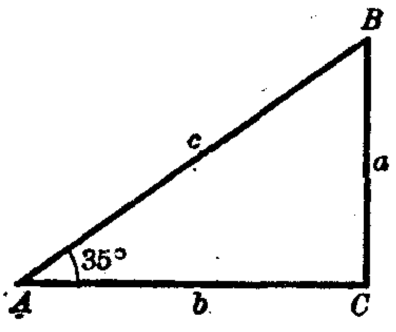


图 1·3

$$A=35^\circ,$$

$$a=5.7,\quad b=8.2,\quad c=10.$$

① 表示 $\angle A$ 的正切、余切和余割的记号，有些书上分别写做 $\tan A$, $\cot A$, $\csc A$.

② 在直角三角形 ABC 里，锐角 A 夹在斜边 c 和直角边 b 之间. 直角边 b 可以简单叫做 $\angle A$ 的邻边.

$$\sin 35^\circ=\frac{a}{c}=\frac{5.7}{10}=0.57;$$

$$\cos 35^\circ=\frac{b}{c}=\frac{8.2}{10}=0.82;$$

$$\operatorname{tg} 35^\circ=\frac{a}{b}=\frac{5.7}{8.2}=0.70;$$

$$\operatorname{ctg} 35^\circ=\frac{b}{a}=\frac{8.2}{5.7}=1.4;$$

$$\sec 35^\circ=\frac{c}{b}=\frac{10}{8.2}=1.2;$$

$$\operatorname{cosec} 35^\circ=\frac{c}{a}=\frac{10}{5.7}=1.7.$$

因为我们量 a 和 b 的长，都只量出两个数字，所以根据它们算出来的结果，从第一个不是零的数字起，也只有开头两个数字是可以信任的，以下就四舍五入.

在画直角三角形的时候，取 $c=10$ 厘米，只是为了计算正弦和余弦的值可以方便一些. 我们也可以取其他的值.

例 2. 在直角三角形 ABC 中，已知 $a=4$，$b=5$，求 $\angle A$ 的正弦，余弦，正切和余切.

【解】 先根据几何学里的勾股定理算出

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{4^2+5^2}=\sqrt{41},$$

然后根据三角函数的定义，求得

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{4}{\sqrt{41}}=\frac{4}{41}\sqrt{41};$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{5}{\sqrt{41}}=\frac{5}{41}\sqrt{41};$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}=\frac{4}{5};$$

$$\operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}=\frac{5}{4}.$$

习　题　1·1

1. 求 50° 角的六个三角函数值.

2. 已知 $a=40$, $c=41$; 求 $\angle A$ 的六个三角函数值.

3. 已知 $a=5$, $b=12$; 求 $\angle A$ 的正弦, 余弦, 正切和余切. 当 $a=10$, $b=24$ 时, $\angle A$ 的这些三角函数值有没有变化?为什么?

4. 已知斜边 AB 等于直角边 AC 的三倍; 求 $\angle A$ 的正弦, 余弦, 正切和余切.

5. 已知 $a=\frac{1}{2}b$; 求 $\angle A$ 的正弦, 余弦, 正割和余割.

6. 已知 $a=2mn$, $b=m^2-n^2$; 根据定义求 $\angle A$ 的正弦, 正切和正割及 $\angle B$ 的余弦, 余切和余割. 比较它们的结果, 你发现了什么?

*7. 已知 $a=2\sqrt{mn}$, $c=m+n\ (m>n>0)$; 求 $\sin A$, $\cos A$ 和 $(\sin A)^2+(\cos A)^2$ 的值.

§1·2　已知某锐角的一个三角函数, 求作这个角

在上一节的例 1 中, 已知一个锐角, 我们用画图的方法求出了这个角的三角函数的近似值. 现在我们研究相反的问题: 已知某一锐角的一个三角函数, 怎样画出这个锐角? 举例说明如下:

例 1. 已知一个锐角的正弦等于 $\frac{4}{5}$, 求作这个锐角.

【解】 一个锐角的正弦, 就是在以它做一个锐角的直角三角形中, 这个角的对边和斜边的比. 现在已知它的正弦的值是 $\frac{4}{5}$. 要画出这个锐角, 就应当画一个直角三角形, 使一条直角边和斜边的比等于 $\frac{4}{5}$. 这样, 这条直角边的对角就是所求作的角.

因此，我们可以任意取一个长度单位(例如1厘米)，作$BC=4$厘米(图1·4). 从C作BC的垂线CD. 以B为圆心，以5厘米为半径，作弧交CD于A，并且连结AB. 这时，直角三角形ABC中，$\angle BAC$就是所求作的锐角.

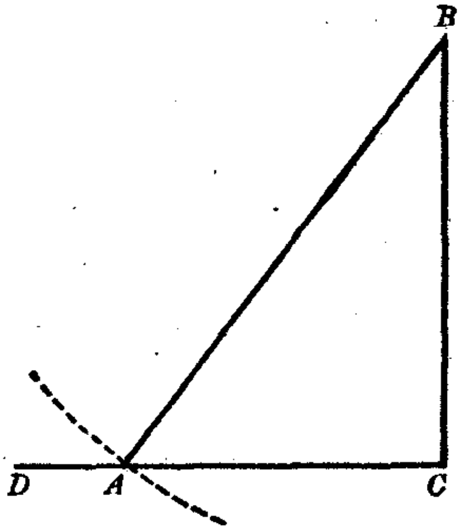


图 1·4

用量角器可以量得这个角约等于$53°$ (简写做$\angle A\approx 53°$).

例2. 已知一个锐角的余弦等于0.79，求作这个锐角.

【解】 0.79就是$\frac{79}{100}$. 为了使图形不要画得太大，我们可以取1毫米$\left(\text{就是}\ \frac{1}{10}\ \text{厘米}\right)$作为长度单位.

因为锐角的余弦，就是在直角三角形中，这个角的邻边和斜边的比，所以我们先作$AC=79$毫米(图1·5)，从C作AC的垂线CD，然后以A为圆心，以100毫米为半径作弧交CD

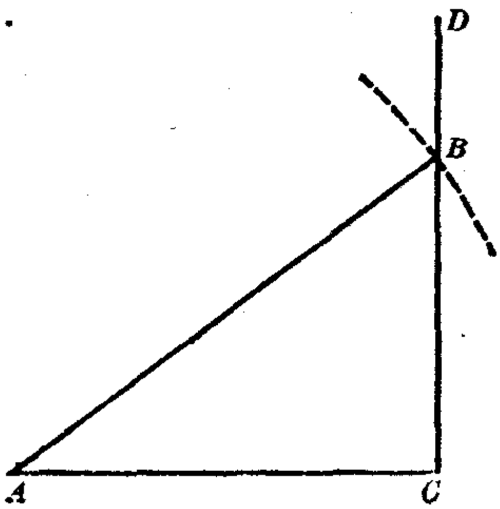


图 1·5

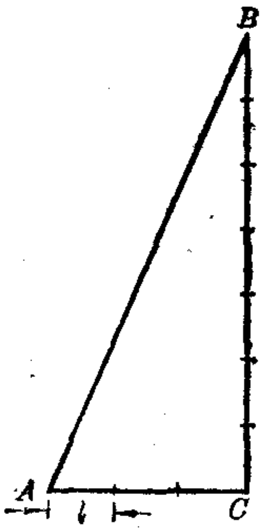


图 1·6

于 B，并且连结 AB. $\angle A$ 就是所求作的锐角.

用量角器可以量得 $\angle A\approx 38°$.

例 3. 已知 $\operatorname{tg} A=2\frac{1}{3}$，求作锐角 A.

【解】 我们把 $2\frac{1}{3}$ 写成 $\frac{7}{3}$. 取适当的长度单位 l（图 1·6），作直角 C. 在它的一边上截取 $CB=7l$，在另一边上截取 $CA=3l$. 连结 AB. 那末，直角三角形 ABC 中的 $\angle A$ 就是所求作的锐角.

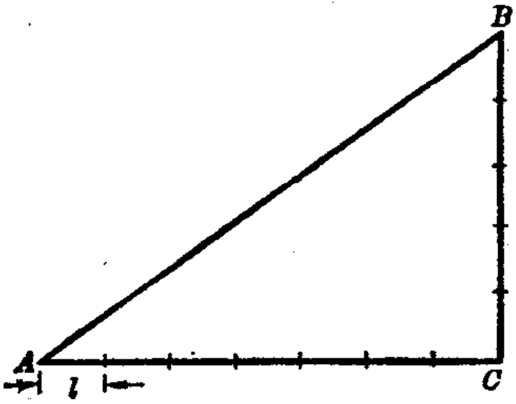


图 1·7

例 4. 已知 $\operatorname{ctg} A=1.4$，求作锐角 A.

【解】 这里，$1.4=\frac{14}{10}=\frac{7}{5}$. 取适当的长度单位 l. 我们在直角 C（图 1·7）的两边上分别取 $AC=7l$，$CB=5l$. 连结 AB. 直角三角形 ABC 中的 $\angle A$ 就是所求作的锐角.

从上面的这些例题中，我们看到，要画出具有已知三角函数值的锐角 A，它的一般步骤是：

把已知的三角函数值表示成分数 $\frac{m}{n}$ 的形式.

已　　知	直角三角形的边长	
$\sin A=\frac{m}{n}$	$a=m$,	$c=n$
$\cos A=\frac{m}{n}$	$b=m$,	$c=n$
$\operatorname{tg} A=\frac{m}{n}$	$a=m$,	$b=n$
$\operatorname{ctg} A=\frac{m}{n}$	$b=m$,	$a=n$

选取一个适当的长度单位，画直角三角形 ABC，使 $\angle C$ 是直角，并且使 $\angle A$，$\angle B$ 和 $\angle C$ 的对边 a，b 和 c 分别适合于上面表中的条件.

这样，直角三角形 ABC 中的角 A 就是所求作的锐角.

习 题 1·2

1. 已知一个锐角的正弦等于0.5，作出这个锐角；并量量看大约等于多少度？
2. 已知 $\cos A=0.7$，作出锐角 A；并量出它的近似值.
3. 已知一个锐角的正割等于1.5；求作这个锐角.
4. 已知 $\operatorname{cosec} A=2$；求作锐角 A.
5. 已知 $\operatorname{tg} A=\frac{5}{4}$；作出锐角 A，并量出它的近似值.
6. 已知 $\operatorname{ctg} A=\frac{4}{5}$；作出锐角 A，并和前题中所求的角作比较.

§1·3 余角的三角函数

在§1·1中我们已经知道，每一个锐角都有六个三角函数. 在图1·8的直角三角形 ABC 中，除了 $\angle A$ 是锐角以外，$\angle B$ 也是锐角. 因此，$\angle B$ 也有六个三角函数. 根据§1·1中讲过的三角函数的定义，可以知道 $\angle B$ 的六个三角函数是

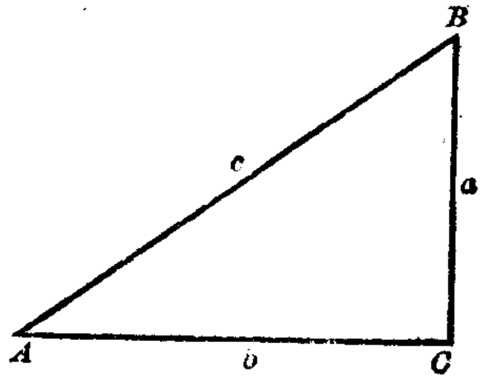


图 1·8

$$\sin B=\frac{\angle B\text{ 的对边}}{\text{斜边}}=\frac{b}{c};$$

$$\cos B=\frac{\angle B\text{ 的邻边}}{\text{斜边}}=\frac{a}{c};$$

$$\operatorname{tg} B=\frac{\angle B\text{ 的对边}}{\angle B\text{ 的邻边}}=\frac{b}{a};$$

$$\operatorname{ctg} B=\frac{\angle B\text{ 的邻边}}{\angle B\text{ 的对边}}=\frac{a}{b};$$

$$\sec B=\frac{\text{斜边}}{\angle B\text{ 的邻边}}=\frac{c}{a};$$

$$\operatorname{cosec} B=\frac{\text{斜边}}{\angle B\text{ 的对边}}=\frac{c}{b}.$$

我们把 $\angle B$ 的三角函数和 $\angle A$ 的三角函数比较一下．例如，

$$\sin B=\frac{b}{c},$$

但

$$\cos A=\frac{b}{c},$$

因此，

$$\sin B=\cos A.$$

同样可以得到

$$\cos B=\sin A; \qquad \operatorname{tg} B=\operatorname{ctg} A;$$

$$\operatorname{ctg} B=\operatorname{tg} A; \qquad \sec B=\operatorname{cosec} A;$$

$$\operatorname{cosec} B=\sec A.$$

直角三角形的两个锐角互为余角；也就是，它们的和等于 90°．所以 $\angle B=90^\circ-\angle A$．在上面的六个等式里，用 $90^\circ-\angle A$ 代替 $\angle B$，便得到

$$\sin(90^\circ-A)=\cos A;$$

$$\cos(90^\circ-A)=\sin A;$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ-A)=\operatorname{ctg} A;$$

$$\operatorname{ctg}(90^\circ-A)=\operatorname{tg} A;$$

$$\sec(90^\circ-A)=\operatorname{cosec} A;$$

$$\operatorname{cosec}(90^\circ-A)=\sec A.$$

通常我们把正弦和余弦互相叫做余函数，就是正弦是余弦的余函数，余弦也是正弦的余函数. 同样，也把正切和余切互相叫做余函数，正割和余割互相叫做余函数. 这样，上面的六个公式，就可以概括成一句话：锐角 A 的余角的三角函数等于锐角 A 的余函数.

例 1. 已知 $\sin 35°=0.57$，求 $\cos 55°$.

【解】 $\cos 55°=\cos(90°-35°)=\sin 35°=0.57$.

例 2. 设 A, B 和 C 是一个三角形的三个内角，求证

$$\sin\frac{A+B}{2}=\cos\frac{C}{2}.$$

【证】 因为 $A+B+C=180°$，所以 $A+B=180°-C$. 因此，

$$\sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{180°-C}{2}=\sin\left(90°-\frac{C}{2}\right)=\cos\frac{C}{2}.$$

习 题 1·3

1. 已知 $\mathrm{tg}\,21°48'=0.4$；求 $\mathrm{ctg}\,68°12'$.

2. 已知 $\sin 30°=\frac{1}{2}$，$\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2}$，$\sin 60°=\frac{\sqrt{3}}{2}$；求 $\cos 30°$, $\cos 45°$, $\cos 60°$ 的值.

3. 将 $\cos 71°$, $\mathrm{ctg}\,45°10'$, $\mathrm{cosec}\,89°$ 化成小于 $45°$ 的锐角的三角函数.

*4. 求证对于任何小于 $45°$ 的锐角 x，等式 $\cos(45°+x)=\sin(45°-x)$ 都成立.

§1·4 30°, 45°, 60°角的三角函数

在 §1·1 的例 1 中，我们已经看到，当已知一个锐角的度数，要找出它的三角函数时，可以用画图的方法来解决. 当然，

这样做,我们只能求得很粗略的近似值.

但是,30°,45°,60° 角的三角函数,却可以利用几何学上的简单性质,求出它们的准确值.

1. 30° 角的三角函数 在平面几何中,我们知道,当直角三角形 ABC 的角 $A=30°$ 时,$c=2a$(图 1·9).因此,

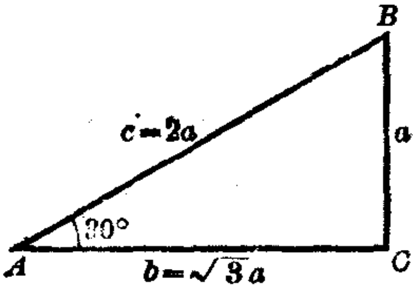


图 1·9

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{a}{2a}=\frac{1}{2}.$$

为了求出 $\cos A$,必须先求出 b. 利用勾股定理,得

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(2a)^2-a^2}=\sqrt{3a^2}=\sqrt{3}\,a.$$

因此,
$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{\sqrt{3}\,a}{2a}=\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

其他四个函数,同样可以根据它们的定义从图 1·9 求出,结果是

$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}=\frac{a}{\sqrt{3}\,a}=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}=\frac{\sqrt{3}\,a}{a}=\sqrt{3};$$

$$\sec A=\frac{c}{b}=\frac{2a}{\sqrt{3}\,a}=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{c}{a}=\frac{2a}{a}=2.$$

所以 30° 角的三角函数是

$$\sin 30°=\frac{1}{2};\qquad \cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \operatorname{tg} 30°=\frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{ctg} 30°=\sqrt{3};\qquad \sec 30°=\frac{2\sqrt{3}}{3};\qquad \operatorname{cosec} 30°=2.$$

2. 45° 角的三角函数 在直角三角形 ABC 中，$\angle A=45°$（图1·10）．那末，

$\angle B=90°-\angle A=90°-45°=45°$.

所以 $\angle B=\angle A$.

因而 $b=a$.

根据勾股定理，得

$$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{a^2+a^2}=\sqrt{2a^2}=\sqrt{2}\,a.$$

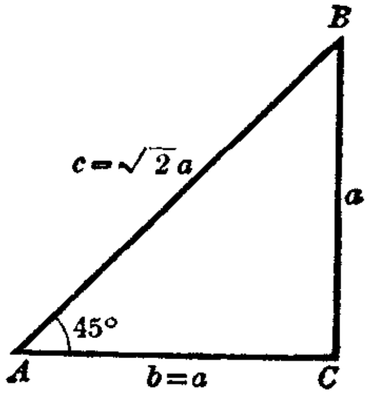


图 1·10

所以

$$\sin A=\frac{a}{c}=\frac{a}{\sqrt{2}\,a}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\cos A=\frac{b}{c}=\frac{a}{\sqrt{2}\,a}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};$$

$$\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}=\frac{a}{a}=1;$$

$$\operatorname{ctg} A=\frac{b}{a}=\frac{a}{a}=1;$$

$$\sec A=\frac{c}{b}=\frac{\sqrt{2}\,a}{a}=\sqrt{2};$$

$$\operatorname{cosec} A=\frac{c}{a}=\frac{\sqrt{2}\,a}{a}=\sqrt{2}.$$

就是

$$\sin 45°=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2};\quad \operatorname{tg} 45°=1;$$

$$\operatorname{ctg} 45°=1;\quad \sec 45°=\sqrt{2};\quad \operatorname{cosec} 45°=\sqrt{2}.$$

3. 60° 角的三角函数 因为 60° 角是 30° 角的余角，所以 60° 角的三角函数，可以利用 30° 角的函数来求，就是

$$\sin 60^\circ = \sin(90^\circ - 30^\circ) = \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$\cos 60^\circ = \cos(90^\circ - 30^\circ) = \sin 30^\circ = \frac{1}{2};$$

$$\operatorname{tg} 60^\circ = \operatorname{tg}(90^\circ - 30^\circ) = \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3};$$

$$\operatorname{ctg} 60^\circ = \operatorname{ctg}(90^\circ - 30^\circ) = \operatorname{tg} 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{3};$$

$$\sec 60^\circ = \sec(90^\circ - 30^\circ) = \operatorname{cosec} 30^\circ = 2;$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ = \operatorname{cosec}(90^\circ - 30^\circ) = \sec 30^\circ = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

当然，利用图1·9中三边的关系求$\angle B$的三角函数，也能够得到上面的结果.

30°，45°，60°角的三角函数，特别是每一个角的正弦，余弦，正切和余切四个函数，用处很多.要记住这些函数的值，最好不要硬背.我们可以记住下面三个图形(图1·11)：在这些图形中，我们用了最简单的数字表示直角三角形各边的长.如果对这三个图形有深刻的印象，那末，我们就不难根据各个三角函数的定义，正确地说出每一个函数的值.

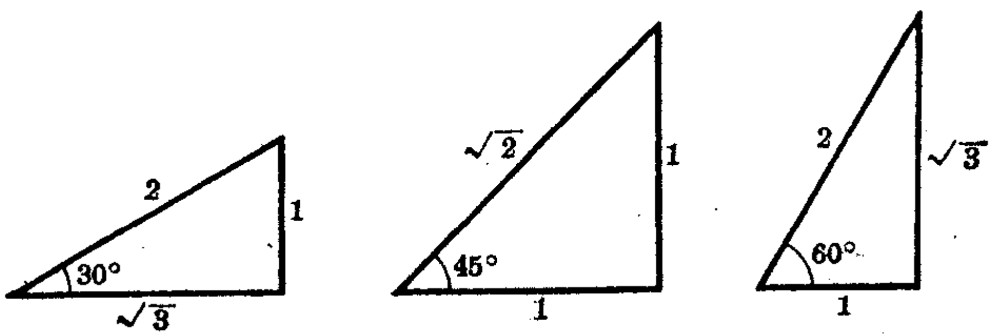


图 1·11

从图形上求得的角的函数值，当分母有根号的时候，要把它化去，目的是为了便于算出用小数表示的近似值.例如：

$$\operatorname{tg} 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\approx\frac{1.7321}{3}\approx 0.5774;$$

$$\cos 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\approx\frac{1.4142}{2}\approx 0.7071;$$

$$\operatorname{cosec} 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\approx\frac{2\times 1.7321}{3}\approx 1.1547.$$

象上面求得的有四位小数的近似值，平常使用起来，已经是足够精确的了.

例 1. 求 $\operatorname{tg} 30^\circ+\sin^2 45^\circ-\cos 60^\circ$ 的值.

习惯上，$\sin A$ 的平方不写做 $(\sin A)^2$ 而写做 $\sin^2 A$. 这里 $\sin^2 45^\circ$ 就是 $\sin 45^\circ$ 的平方.

【解】 $\operatorname{tg} 30^\circ+\sin^2 45^\circ-\cos 60^\circ$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}+\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}+\frac{2}{4}-\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

例 2. 求适合于下式的锐角 x:

$$\sqrt{2}\cos x-1=0.$$

【解】 $\sqrt{2}\cos x-1=0$, $\sqrt{2}\cos x=1$,

$$\therefore\quad \cos x=\frac{1}{\sqrt{2}}.\qquad \therefore\quad x=45^\circ.$$

习 题 1·4

1. 算出下列各式的结果:

(1) $\sin 60^\circ-\cos^2 60^\circ+\operatorname{tg} 45^\circ-\sec^2 30^\circ$;

(2) $\sin 45^\circ\cos 45^\circ+\operatorname{cosec} 60^\circ\sec 45^\circ$;

(3) $\operatorname{tg} 30^\circ\operatorname{ctg} 60^\circ+\cos^2 30^\circ$;

(4) $\cos^2 30^\circ+\sin^2 30^\circ$;

(5) $\sec^2 60° - \mathrm{tg}^2 60°$;

(6) $\sin(60° - x) + \mathrm{cosec}^2 45° - \mathrm{ctg}^2 45° - \cos(30° + x)$;

(7) $\dfrac{\mathrm{cosec}^2 30° \cdot \mathrm{ctg}(45° + x)}{(1 + \mathrm{ctg}^2 30°) \cdot \mathrm{tg}(45° - x)}$.

2. 求适合于下列各式的 x:

(1) $\mathrm{tg}x - \sqrt{3} = 0$;　　(2) $2\sin x - \sqrt{3} = 0$;

(3) $2\sec x - \sqrt{8} = 0$;　　(4) $\sqrt{3}\,\mathrm{ctg}(10° + x) - 1 = 0$.

3. 设 $\angle A = 30°$, 验证:

(1) $\sin 2A = 2\sin A\cos A$;　　(2) $\cos 2A = 1 - 2\sin^2 A$;

(3) $\mathrm{tg}\,2A = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,A}{1 - \mathrm{tg}^2 A}$.

4. 设 $\angle A = 45°$, 求 $\dfrac{\cos A}{\mathrm{tg}\,A - \sin(75° - A)}$ 的值.

§1·5 间隔为 1° 的三角函数表

除了 30°, 45°, 60° 角的三角函数以外,其他锐角的三角函数,要求得比较精确的值是不很容易的. 为了便于使用三角函数,要学会怎样查现成的三角函数表.

第 17 页上的三角函数表, 是 0° 到 90° 间整数度数的角的三角函数,精确到小数第四位. 在这个表中,从左到右第一行(它的上端标着 A)所载的是角的度数: 0°, 1°, 2°, 3°, …, 90°. 第二行的上端标着正弦, 第三行的上端标着正切, 第四行的上端标着正割. 这三行分别载着各个角的正弦, 正切和正割精确到小数第四位的近似值.

例 1. 查表求 tg 37°.

【解】 先在第一行中找到 37°. 在标着 37° 的横列和上端标着正切的直行交叉处所载的数是 0.7536. 所以

$$\mathrm{tg}\,37° = 0.7536.$$

由于 $\cos A = \sin(90° - A)$, 所以 $\cos 1° = \sin 89°$, $\cos 2°$

三角函数表

(0° 到 90° 间整数度数的角)

A	正弦	正切	正割		A	正弦	正切	正割	
0°	0.0000	0.0000	1.0000	90°	45°	0.7071	1.0000	1.4142	45°
1°	0.0175	0.0175	1.0002	89°	46°	0.7193	1.0355	1.4396	44°
2°	0.0349	0.0349	1.0006	88°	47°	0.7314	1.0724	1.4663	43°
3°	0.0523	0.0524	1.0014	87°	48°	0.7431	1.1106	1.4945	42°
4°	0.0698	0.0699	1.0024	86°	49°	0.7547	1.1504	1.5243	41°
5°	0.0872	0.0875	1.0038	85°	50°	0.7660	1.1918	1.5557	40°
6°	0.1045	0.1051	1.0055	84°	51°	0.7771	1.2349	1.5890	39°
7°	0.1219	0.1228	1.0075	83°	52°	0.7880	1.2799	1.6243	38°
8°	0.1392	0.1405	1.0098	82°	53°	0.7986	1.3270	1.6616	37°
9°	0.1564	0.1584	1.0125	81°	54°	0.8090	1.3764	1.7013	36°
10°	0.1736	0.1763	1.0154	80°	55°	0.8192	1.4281	1.7434	35°
11°	0.1908	0.1944	1.0187	79°	56°	0.8290	1.4826	1.7883	34°
12°	0.2079	0.2126	1.0223	78°	57°	0.8387	1.5399	1.8361	33°
13°	0.2250	0.2309	1.0263	77°	58°	0.8480	1.6003	1.8871	32°
14°	0.2419	0.2493	1.0306	76°	59°	0.8572	1.6643	1.9416	31°
15°	0.2588	0.2679	1.0353	75°	60°	0.8660	1.7321	2.0000	30°
16°	0.2756	0.2867	1.0403	74°	61°	0.8746	1.8040	2.0627	29°
17°	0.2924	0.3057	1.0457	73°	62°	0.8829	1.8807	2.1301	28°
18°	0.3090	0.3249	1.0515	72°	63°	0.8910	1.9626	2.2027	27°
19°	0.3256	0.3443	1.0576	71°	64°	0.8988	2.0503	2.2812	26°
20°	0.3420	0.3640	1.0642	70°	65°	0.9063	2.1445	2.3662	25°
21°	0.3584	0.3839	1.0711	69°	66°	0.9135	2.2460	2.4586	24°
22°	0.3746	0.4040	1.0785	68°	67°	0.9205	2.3559	2.5593	23°
23°	0.3907	0.4245	1.0864	67°	68°	0.9272	2.4751	2.6695	22°
24°	0.4067	0.4452	1.0946	66°	69°	0.9336	2.6051	2.7904	21°
25°	0.4226	0.4663	1.1034	65°	70°	0.9397	2.7475	2.9238	20°
26°	0.4384	0.4877	1.1126	64°	71°	0.9455	2.9042	3.0716	19°
27°	0.4540	0.5095	1.1223	63°	72°	0.9511	3.0777	3.2361	18°
28°	0.4695	0.5317	1.1326	62°	73°	0.9563	3.2709	3.4203	17°
29°	0.4848	0.5543	1.1434	61°	74°	0.9613	3.4874	3.6280	16°
30°	0.5000	0.5774	1.1547	60°	75°	0.9659	3.7321	3.8637	15°
31°	0.5150	0.6009	1.1666	59°	76°	0.9703	4.0108	4.1336	14°
32°	0.5299	0.6249	1.1792	58°	77°	0.9744	4.3315	4.4454	13°
33°	0.5446	0.6494	1.1924	57°	78°	0.9781	4.7046	4.8097	12°
34°	0.5592	0.6745	1.2062	56°	79°	0.9816	5.1446	5.2408	11°
35°	0.5736	0.7002	1.2208	55°	80°	0.9848	5.6713	5.7588	10°
36°	0.5878	0.7265	1.2361	54°	81°	0.9877	6.3138	6.3925	9°
37°	0.6018	0.7536	1.2521	53°	82°	0.9903	7.1154	7.1853	8°
38°	0.6157	0.7813	1.2690	52°	83°	0.9925	8.1443	8.2055	7°
39°	0.6293	0.8098	1.2868	51°	84°	0.9945	9.5144	9.5668	6°
40°	0.6428	0.8391	1.3054	50°	85°	0.9962	11.4301	11.4737	5°
41°	0.6561	0.8693	1.3250	49°	86°	0.9976	14.3007	14.3356	4°
42°	0.6691	0.9004	1.3456	48°	87°	0.9986	19.0811	19.1073	3°
43°	0.6820	0.9325	1.3673	47°	88°	0.9994	28.6363	28.6537	2°
44°	0.6947	0.9657	1.3902	46°	89°	0.9998	57.2900	57.2987	1°
45°	0.7071	1.0000	1.4142	45°	90°	1.0000	∞	∞	0°
	余弦	余切	余割	A		余弦	余切	余割	A

$=\sin 88°$, …. 同样, $\operatorname{ctg} 1° = \operatorname{tg} 89°$, $\operatorname{ctg} 2° = \operatorname{tg} 88°$, …; $\operatorname{cosec} 1° = \sec 89°$, $\operatorname{cosec} 2° = \sec 88°$, …. 所以锐角的余弦,余切和余割的值,可以不必另外列出.

为了查起来方便,表的最右边一行也载着角度,但度数是按由下到上的方向增大的. 同时,在上端标着正弦,正切或者正割的各行,在它们的下端分别标着余弦,余切或者余割. 这样,求锐角的余弦,余切或者余割的时候,就可以在最右边的一行找度数,在下端去找函数的名称.

例 2. 查表求 $\cos 24°$.

【解】 在表的右边找到 24°,下端找到余弦. 在标着 24° 的横列和标着余弦的直行的交叉处,所载的数是 0.9135. 所以

$$\cos 24° = 0.9135.$$

注意 按照表的这样排列,查锐角的余弦,余切或者余割时,就必须用最右边一行的度数,不可搞错.

用这个表,我们不但能够求出已知锐角的三角函数,并且反过来,也能从已知的三角函数值,求出对应的锐角.

例 3. 已知 $\sin A = 0.8387$, 求锐角 A.

【解】 在上端标着正弦的一行里,找到 0.8387. 横着看左边第一行里对应的角度是 57°. 所以 $A = 57°$.

例 4. 已知 $\operatorname{ctg} A = 4.0108$, 求锐角 A.

【解】 在下端标着余切的一行里,找到 4.0108. 横着看最右边一行里对应的角度是 14°. 所以 $A = 14°$.

注意 由于已知的是余切的值,角的度数应当在最右边一行里找.

如果已知的三角函数值不能在表中找到,但能够找到和它接近的函数值,那末所求角的度数就不是整数. 在这种情形下,我们可以仿照下例求出角度精确到1度的近似值.

例 5. 已知 $\sec A=1.18$，求锐角 A。

【解】 在正割的一行里，找不到 1.1800. 但能够找到比 1.1800 稍小的 1.1792 和比 1.1800 稍大的 1.1924. 对应于这两个正割值的锐角分别是 32° 和 33°. 由此可知，锐角 A 在 32° 和 33° 之间. 因为 1.1792 同 1.1800 更接近，所以我们取正割等于 1.1792 的那一个角作为角 A 的近似值. 因此，$A=32^\circ$（精确到 1°）。

习 题 1·5

1. 查表求下列三角函数的值:

(1) $\sin 20^\circ$;　(2) $\cos 80^\circ$;　(3) $\mathrm{tg}\,15^\circ$;

(4) $\mathrm{ctg}\,78^\circ$;　(5) $\sec 18^\circ$;　(6) $\mathrm{cosec}\,89^\circ$.

2. 查表求下列各锐角 α（精确到 1°）:

(1) $\sin\alpha=0.3777$;　(2) $\cos\alpha=0.9901$;

(3) $\mathrm{tg}\,\alpha=0.8012$;　(4) $\mathrm{ctg}\,\alpha=1.0012$;

(5) $\sec\alpha=12.34$;　(6) $\mathrm{cosec}\,\alpha=81.09$.

3. 查表回答下列问题:

(1) $\sin 10^\circ+\sin 35^\circ$ 是不是等于 $\sin 45^\circ$?

(2) $\cos 70^\circ-\cos 10^\circ$ 是不是等于 $\cos 60^\circ$?

(3) $\mathrm{tg}\,2^\circ\cdot\mathrm{tg}\,15^\circ$ 是不是等于 $\mathrm{tg}\,30^\circ$?

*(4) 用“$>$”或“$<$”号连结 $\cos 18^\circ$, $\cos 36^\circ$, $\cos 54^\circ$, $\cos 72^\circ$.

*(5) 已知 $\sin\alpha=0.1000$, $\sin\beta=0.2000$, $\sin\gamma=0.3000$，试用“$>$”或“$<$”号连结 α, β, γ.

(6) $3\,\mathrm{tg}\,20^\circ$ 是不是等于 $\mathrm{tg}\,60^\circ$?

(7) 如果 $2\sin\alpha=\sin 30^\circ$，$\alpha$ 是不是等于 15°?

(8) 已知 $\mathrm{tg}\,\alpha=1.3105$, $\mathrm{tg}\,\beta=1.4291$，$\alpha$ 和 β 哪个大？又 $\mathrm{ctg}\,32^\circ$ 和 $\mathrm{ctg}\,41^\circ$ 哪个大?

§1·6 角由 0° 变到 90° 时，三角函数的变化

在第 17 页的三角函数表中，我们看到，当角由 0° 变到 90°

时，它的各个三角函数都在变化. 现在我们仔细研究一下它们的变化情形.

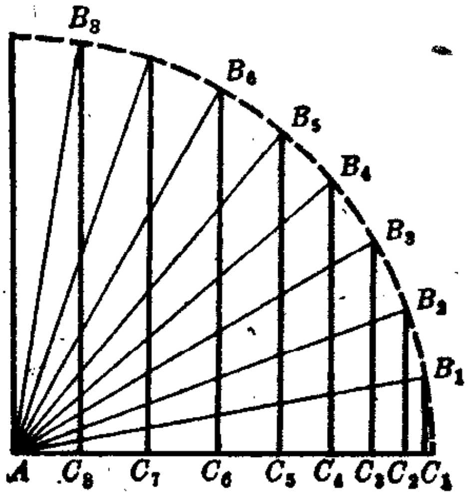


图 1·12

我们把角看做是由一条射线绕着它的端点旋转而成的. 在旋转开始时射线所在的位置叫做角的始边；在旋转终了时射线所在的位置叫做角的终边.

在图 1·12 中，射线由开始的水平位置旋转到铅直位置. 这样就生成 0° 到 90° 的角. 图中画出了射线每旋转 10° 时所成的角的终边. 在这些终边上，截取相等的线段 AB_1, AB_2, AB_3, …. 经过 B_1, B_2, B_3, …，作始边上的垂线 B_1C_1, B_2C_2, B_3C_3, …. 根据角的正弦的定义，可以知道

$$\sin B_1AC_1=\frac{B_1C_1}{AB_1},\ \sin B_2AC_2=\frac{B_2C_2}{AB_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ \sin B_8AC_8=\frac{B_8C_8}{AB_8}.$$

我们看到，在这些分数中，分母都相等，而分子逐渐增大. 所以这些分数也逐渐增大. 这就是说，当锐角增大时，它的正弦是逐渐增大的.

同样，

$$\cos B_1AC_1=\frac{AC_1}{AB_1},\ \cos B_2AC_2=\frac{AC_2}{AB_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\ \cos B_8AC_8=\frac{AC_8}{AB_8}.$$

在这些分数中，因为分母都相等，而分子逐渐减小，所以这些分数也逐渐减小. 因此，当锐角增大时，它的余弦逐渐减小.

正切的变化，可以从下面的等式里看出：

$$\operatorname{tg} B_1AC_1=\frac{B_1C_1}{AC_1},\quad \operatorname{tg} B_2AC_2=\frac{B_2C_2}{AC_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,\quad \operatorname{tg} B_8AC_8=\frac{B_8C_8}{AC_8}.$$

在这些分数里，分子逐渐增大，分母逐渐减小．分子和分母的变化都使分数增大．所以当锐角增大时，它的正切逐渐增大．

至于余切，正割和余割的变化，也都可以用同样的方法看出来：当锐角增大时，余切逐渐减小，正割逐渐增大，余割逐渐减小．

我们要特别注意当锐角变得愈来愈接近于 $0°$ 和愈来愈接近于 $90°$ 时，它的三角函数的变化情形．

当直角三角形的锐角逐渐减小，接近于 $0°$ 的时候，它的对边的长逐渐接近于 0，而邻边的长逐渐接近于斜边的长．只要想一想各个三角函数的定义，就可以知道，这时锐角的正弦和正切逐渐接近于 0；余弦和正割逐渐接近于 1；而余切和余割将无限制地增大，通常我们说，趋近于无穷大．

当直角三角形的锐角变成等于 $0°$ 的角时，对边的长等于 0，邻边和斜边的长相等．因此，对于一个 $0°$ 的角来说，我们应该认为它的正弦和正切等于 0；余弦和正割等于 1；而没有余切和余割，也就是，余切和余割不存在．

同样可以看到，当锐角逐渐增大，接近于 $90°$ 时，余弦和余切逐渐接近于 0，正弦和余割逐渐接近于 1，而正切和正割将无限制地增大．等于 $90°$ 的角的余弦和余切等于 0，正弦和余割等于 1，而正切和正割不存在．

由上面，我们能够清楚地知道，当角由 $0°$ 变化到 $90°$ 时，

它的三角函数的变化是:

正弦由 0 增大到 1;

余弦由 1 减小到 0;

正切由 0 逐渐增大，当角等于 $90°$ 时，正切不存在;

当角等于 $0°$ 时，余切不存在，然后由正值逐渐减小到 0;

正割由 1 逐渐增大，当角等于 $90°$ 时，正割不存在;

当角等于 $0°$ 时，余割不存在，然后由正值逐渐减小到 1.

上面的结果可以列成下表:

	$0°$	↗	$90°$
正　　弦	0	↗	1
余　　弦	1	↘	0
正　　切	0	↗	不存在
余　　切	不存在	↘	0
正　　割	1	↗	不存在
余　　割	不存在	↘	1

表中向上的箭头"↗"表示逐渐增大，向下的箭头"↘"表示逐渐减小。

例　化简 $\sin 90° + \cos 90° + \dfrac{1}{\sin 90°} + \operatorname{ctg} 90°$.

【解】
$$\sin 90° + \cos 90° + \frac{1}{\sin 90°} + \operatorname{ctg} 90°$$
$$= 1 + 0 + \frac{1}{1} + 0 = 2.$$

习　题　1·6

1. 不用查表，决定下列各差的符号:

(1) $\sin 50° - \sin 51°$;　　(2) $\cos 50° - \cos 51°$;

(3) $\operatorname{tg} 17° - \operatorname{tg} 18°$;　　(4) $\operatorname{ctg} 81° - \operatorname{ctg} 71°$;

(5) $\sec 20° - \sec 21°$;　　(6) $\operatorname{cosec} 1° - \operatorname{cosec} 2°$;

(7) $\sin 50° - \cos 50°$;　　(8) $\operatorname{tg} 10° - \operatorname{ctg} 80°$;

(9) $\sec 31° - \operatorname{cosec} 59°$;

(10) $\sin 42° - \cos 48°$。

2．计算下列各题：

(1) $\cos 60° - \operatorname{tg} 0° + \sin^2 90° - \cos 0°$;

(2) $\sin^2 0° + \cos^2 0°$; (3) $\operatorname{ctg}^2 90° + \cos^2 90°$;

(4) $\sec^2 0° - \operatorname{tg}^2 0°$; (5) $\operatorname{cosec}^2 90° - \operatorname{ctg}^2 90°$;

(6) $\dfrac{\sin 90° \operatorname{cosec} 30° \operatorname{tg} 33°}{\cos 30° \operatorname{ctg} 57°}$.

3．在公式：$\sin(90°-A)=\cos A$, $\cos(90°-A)=\sin A$, $\operatorname{tg}(90°-A)=\operatorname{ctg} A$, $\operatorname{ctg}(90°-A)=\operatorname{tg} A$, $\sec(90°-A)=\operatorname{cosec} A$, $\operatorname{cosec}(90°-A)=\sec A$ 中，(1) 当 $A=0°$ 时，哪几个仍旧正确？哪几个失去意义？(2) 当 $A=90°$ 时，哪几个仍旧正确？哪几个失去意义？

§1·7 四位数学用表中的三角函数表

第 17 页上的三角函数表所载的是从 0° 到90°每差 1° 各角的三角函数的值．利用这表，只能查出整数度数角的三角函数，而且反过来由已知的函数值求得的角，只能精确到 1°．在实际应用中，这张表是不够精确的．

读者可买一本“四位数学用表”（人民教育出版社出版）．这本书里的表 VIII，表 IX 和表 X 的内容如下：

表 VIII 载从 0° 到 90° 每差 6′ 各角的正弦和余弦的值．

表 IX 载从 0° 到 76° 每差 6′ 各角的正切的值，和从 14° 到 90° 每差 6′ 各角的余切的值．

表 X 载从 76° 到 90° 每差 1′ 各角的正切的值，和从 0° 到 14° 每差 1′ 各角的余切的值．

现在说明它们的用法如下：

1．由已知锐角求函数值 我们以表 VIII 为例．下面是表 VIII 的一部分．

VIII 正　弦

A	0′	6′	12′	18′	24′	30′	36′	42′	48′	54′	60′		1′	2′	3′
35°	0.5736	5750	5764	5779	5793	5807	5821	5835	5850	5864	0.5878	54°	2	5	7
36°	5878	5892	5906	5920	5934	5948	5962	5976	5990	6004	6018	53°	2	5	7
37°	6018	6032	6046	6060	6074	6088	6101	6115	6129	6143	6157	52°	2	5	7
38°	6157	6170	6184	6198	6211	6225	6239	6252	6266	6280	6293	51°	2	5	7
39°	6293	6307	6320	6334	6347	6361	6374	6388	6401	6414	0.6428	50°	2	4	7
40°	0.6428	6441	6455	6468	6481	6494	6508	6521	6534	6547	6561	49°	2	4	7
41°	6561	6574	6587	6600	6613	6626	6639	6652	6665	6678	6691	48°	2	4	7
42°	6691	6704	6717	6730	6743	6756	6769	6782	6794	6807	6820	47°	2	4	6
43°	6820	6833	6845	6858	6871	6884	6896	6909	6921	6934	6947	46°	2	4	6
44°	6947	6959	6972	6984	6997	7009	7022	7034	7046	7059	0.7071	45°	2	4	6
…	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	……	…	……	……	……
	60′	54′	48′	42′	36′	30′	24′	18′	12′	6′	0′	A			

余　弦

从上面的样表可以看到，表的排列和第 17 页上的三角函数表一样，也是利用互为余角的三角函数间的关系，使同一张表既可查正弦，也可查余弦．在查一个角的正弦的时候，应当从左边标着 A 的直行和上端的横列中分别查出这个角的度数和分数；而在查一个角的余弦的时候，应当从右边标着 A 的直行和下端的横列中分别查出这个角的度数和分数．

例 1．查表求 $\sin 36°42'$．

【解】 从左边找到角的度数 36°，上端找到角的分数 42′．在 36° 的横列和 42′ 的直行的交叉处看到 5976．这是 36°42′ 的正弦的小数部分．我们添上小数点，得

$$\sin 36°\,42' = 0.5976.$$

例 2．查表求 $\cos 49°30'$．

【解】 从右边找到角的度数 49°，下端找到角的分数 30′．在 49° 的横列和 30′ 的直行的交叉处看到 6494，得

$$\cos 49°30' = 0.6494.$$

当角的分数不是 6′ 的倍数时，可以从表的最右边三行查出函数的修正值，从而得到所求的函数值．

例 3. 查表求 $\sin 40^\circ 26'$.

【解】 $26'$ 在 $24'$ 与 $30'$ 之间，靠近 $24'$. 先查出

$$\sin 40^\circ 24' = 0.6481.$$

因为 $40^\circ 26' = 40^\circ 24' + 2'$，我们在标着 40° 的横列和标着 $2'$ 的直行交叉处查出修正值 4. 这是小数第四位的 4. 我们知道，锐角变大时，正弦增大. 可见应当在 $\sin 40^\circ 24' = 0.6481$ 的值上加上 $2'$ 的修正值，结果得

$$\sin 40^\circ 26' = 0.6481 + 0.0004 = 0.6485.$$

例 4. 查表求 $\sin 38^\circ 17'$.

【解】 $17'$ 在 $12'$ 与 $18'$ 之间，靠近 $18'$. 先查出

$$\sin 38^\circ 18' = 0.6198.$$

但 $38^\circ 17' = 38^\circ 18' - 1'$. 在标着 38° 的一列里查出 $1'$ 的修正值 0.0002. 因为角变小，正弦也减小，所以

$$\sin 38^\circ 17' = 0.6198 - 0.0002 = 0.6196.$$

例 5. 查表求 $\cos 51^\circ 23'$.

【解】 先查得 $\cos 51^\circ 24' = 0.6239$. 由于 $51^\circ 23' = 51^\circ 24' - 1'$，我们再查出 $1'$ 的修正值 0.0002. 因为较小角的余弦反而大，所以

$$\cos 51^\circ 23' = 0.6239 + 0.0002 = 0.6241.$$

在例 3 里为了求 $\sin 40^\circ 26'$，我们先查较小角 $40^\circ 24'$ 的正弦；在例 4 里为了求 $\sin 38^\circ 17'$，我们先查较大角 $38^\circ 18'$ 的正弦. 这是因为已知角和这些角更接近的缘故. 如果已知角的大小同表中所列的相差 $3'$，那末先查较小角的函数值，或者先查较大角的函数值，就没有关系.

例 6. 查表求 $\cos 54^\circ 39'$.

【解】 因为 $39'$ 跟 $36'$ 和 $42'$ 都相差 $3'$，所以先查 $54^\circ 36'$ 或者先查 $54^\circ 42'$ 的余弦都可以. 假定我们先查 $54^\circ 36'$ 的余弦，得

$$\cos 54°36' = 0.5793,$$

由于 $54°39' = 54°36' + 3'$，根据 $3'$ 的修正值 $= 0.0007$，因为角增大，余弦减小，所以

$$\cos 54°39' = 0.5793 - 0.0007 = 0.5786.$$

用表 IX 查已知角的正切或者余切的方法和表 VIII 的用法相同．只要注意当锐角增大的时候，正切增大而余切减小．我们把利用修正值，求已知角的函数值的方法小结一下：

由已知角求正弦或正切：较小角的函数值加上函数的修正值；较大角的函数值减去函数的修正值．

由已知角求余弦或余切：较小角的函数值减去函数的修正值；较大角的函数值加上函数的修正值．

当锐角大于 $76°$ 时，它的正切增长得非常快．表 X 里列出了 $76°$ 到 $90°$ 每相差 $1'$ 的正切值(同时也就是 $0°$ 到 $14°$ 每相差 $1'$ 的余切值)，因此就不需要列入修正值了．表 X 的查法是很简单的，这里不再举例．

习　题　1·7(1)

1．查表求下列各三角函数的值：

(1) $\sin 42°42'$;　(2) $\sin 59°58'$;　(3) $\cos 71°19'$;

(4) $\cos 55°41'$;　(5) $\operatorname{tg} 75°30'$;　(6) $\operatorname{tg} 11°11'$;

(7) $\operatorname{ctg} 79°54'$;　(8) $\operatorname{ctg} 43°29'$.

2．当 $\alpha = 32°33'$ 时，验证不等式 $\sin\alpha + \cos\alpha > 1$ 和 $\sin\alpha + \cos\alpha < 1.5$ 是正确的．

3．查表计算 $\sin^2 21°31' + \cos^2 21°31'$ 的值．

2．由已知函数值求锐角　当已知的函数值能够在表中找到的时候，我们立刻就可以查出对应的锐角．这是没有困难的．例如：

已知 $\sin x=0.6428$, 那末 $x=40°0'$.

已知 $\cos x=0.6600$, 那末 $x=48°42'$.

但是,如果已知的函数值在表中没有. 那末,就要加上或者减去角度的修正值. 下面举几个例子.

例 7. 已知 $\sin x=0.5784$, 求锐角 x.

【解】 在正弦表中查不到这个数. 但能够找到同它最接近的数 0.5779 是 $\sin 35°18'$. 已知的正弦值比这个值大 0.0005, 就是 $0.5784=0.5779+0.0005$. 在修正值表中查出, 同 0.0005 对应的角度修正值是 $2'$. 我们知道正弦函数值越大,对应的锐角也越大. 因此,所求的角 x 比表中查出的角大 $2'$. 所以答案是

$$x=35°18'+2'=35°20'.$$

例 8. 已知 $\sin x=0.6273$, 求锐角 x.

【解】 在正弦表中查出同已知函数值最接近的数 0.6280 是 $\sin 38°54'$. 已知的正弦值比这个值小 0.0007. 在修正值表中查出同 0.0007 对应的角度修正值是 $3'$. 因为正弦值越小,对应的锐角也越小,所以应当从 $38°54'$ 减去 $3'$. 也就是

$$x=38°54'-3'=38°51'.$$

例 9. 已知 $\sin x=0.6235$, 求锐角 x.

【解】 在正弦表中查出 $0.6239=\sin 38°36'$. 已知的正弦值比这个值小 0.0004. 所以应当从 $38°36'$ 减去对应于 0.0004 的角度修正值. 但在修正值表中只能查得对应于 0.0002, 0.0005 和 0.0007 的角度修正值. 在这三个数中,同 0.0004 最接近的是 0.0005. 我们取对应于 0.0005 的角度修正值 $2'$. 因此,

$$x=38°36'-2'=38°34'.$$

例 10. 已知 $\cos x=0.6580$，求锐角 x.

【解】 从表中查得 $0.6587=\cos 48°48'$. 已知的余弦值比查得的余弦值小 0.0007，这说明所求的角比查得的角大. 因此，对应于 0.0007 的角度修正值 $3'$ 应当加到 $48°48'$ 上去. 也就是

$$x=48°48'+3'=48°51'.$$

利用表 IX 由已知的正切或余切值求锐角时，角度修正值的加减法则，与正弦和余弦的情况相同.

下面我们列出由已知的函数值求锐角时，角度修正值的加减法则：

由已知的正弦或正切值求锐角：对应于较小函数值的角加上角度修正值；对应于较大函数值的角减去角度修正值.

由已知的余弦或余切值求锐角：对应于较小函数值的角减去角度修正值；对应于较大函数值的角加上角度修正值.

当对应于已知正切值的角在 $76°$ 到 $90°$ 的范围里，或者对应于已知余切值的角在 $0°$ 到 $14°$ 的范围里时，对应的角要在表 X 中找. 这时，如果已知的函数值不能恰好在表中找到，那末只要取最接近的函数值，就可以直接找出精确到 $1'$ 的对应角.

习　题　1·7(2)

1. 查表求下列各锐角 α：

(1) $\sin\alpha=0.0363$；　　(2) $\sin\alpha=0.8873$；

(3) $\cos\alpha=0.1656$；　　(4) $\cos\alpha=0.9893$；

(5) $\operatorname{tg}\alpha=10.00$；　　(6) $\operatorname{tg}\alpha=0.2345$；

(7) $\operatorname{ctg}\alpha=3.410$；　　(8) $\operatorname{ctg}\alpha=0.3000$.

2. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\sin 39°39'+\cos 80°10'$，求 α.

3. 已知 $\sin\alpha=2\sin 10°$，求 α.

4. 已知 $\cos 2\alpha = 2\cos 70°$，求 α.

5. 已知 $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 10° + \operatorname{tg} 20°$，求 α.

6. 已知 $\cos x = \frac{1}{4}$，求 $\sin x$, $\operatorname{tg} x$ 和 $\operatorname{ctg} x$ 的值.

§1·8 直角三角形的解法

一个三角形的三条边和三个角叫做它的六个元素. 所谓解三角形，就是根据已知的元素，求出它的未知元素.

现在我们只研究直角三角形的解法. 我们仍用 C 表示直角三角形 ABC 的直角，而把三个角 A, B, C 的对边分别用 a, b, c 表示.

对于直角三角形来说，除了一个直角以外，如果还知道两个元素(其中至少有一个元素是边)，那末，总可以利用三角函数求出其他的元素. 已知的两个元素可以是:

(1) 斜边和一个锐角: 就是已知 c 和 A, 或者 c 和 B.

(2) 一条直角边和一个锐角: 这里已知的直角边可以是已知锐角的对边，例如已知 a 和 A 或者 b 和 B; 也可以是邻边，例如已知 b 和 A 或者 a 和 B.

(3) 斜边和一条直角边: 就是已知 c 和 a 或者 c 和 b.

(4) 两条直角边: 就是已知 a 和 b.

下面我们分别举例说明这四种情形的解法. 在所有的例题和习题里，求角都要求精确到 $1'$.

1. 已知斜边和一个锐角

例 1. 已知 $c = 287.4$, $B = 42°6'$; 求 A, a 和 b. (图 1·13)

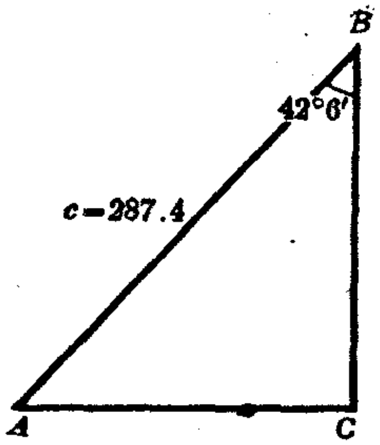


图 1·13

【解】 (1) $A=90°-B=90°-42°6'=47°54'$.

(2) $\dfrac{a}{c}=\cos B$;

$\therefore\quad a=c\cos B=287.4\cos 42°6'=287.4\times 0.7420=213.2$.

(3) $\dfrac{b}{c}=\sin B$;

$\therefore\quad b=c\sin B=287.4\sin 42°6'=287.4\times 0.6704=192.7$.

注意 根据四位的三角函数值计算边长，如果没有指明要精确到哪一位，那末求得的结果就保留四个数字.

例 2. 一仓库屋顶的倾斜度是 30°，椽长 AB 等于 7.3 米(图 1·14)；求这仓库的宽 AA'(精确到 0.1 米)。

【解】 因为

$$\frac{AC}{AB}=\cos A,$$

所以 $AC=AB\cos A=7.3\cos 30°=7.3\times 0.8660=6.32$.

$$AA'=2AC=2\times 6.32=12.6.$$

答：仓库的宽约为 12.6 米.

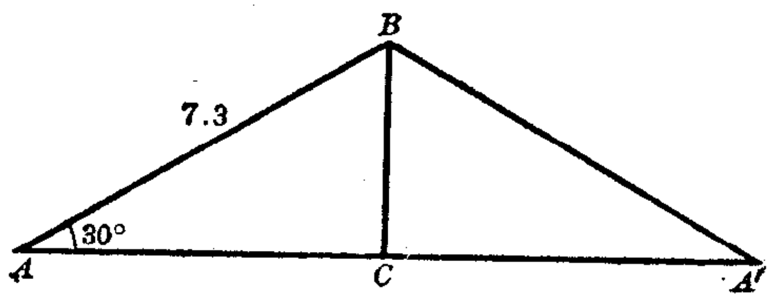


图 1·14

习 题 1·8(1)

1. 解下列各直角三角形:

(1) 已知 $c=35.00$, $A=35°35'$; (2) 已知 $c=315.7$, $B=61°6'$.

2. 等腰三角形的腰长为 30.02 cm，底角等于 70°，求底边上的高

和底边的长.

3. 菱形的边长为 4.2 m，一个锐角为 70°，求它的两条对角线的长.

4. 一块圆形铁板，半径为 12.67 m，要截成一块尽可能大的正九边形，它的一边的长应当是多少？

5. 梯长 6.5 m，下端着地，上端靠墙，设梯与地面成 72° 的角，问下端距墙脚有多远（精确到 0.1 m）？

2. 已知一条直角边和一个锐角

例 3. 已知 $a=15.2$, $A=13°58'$；求 B, b 和 c.（图 1·15）

【解】 (1) $B=90°-A=90°-13°58'=76°2'$.

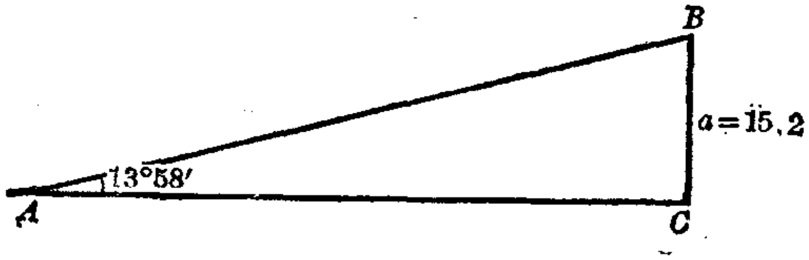


图 1·15

(2) $\dfrac{b}{a}=\operatorname{ctg} A$;

$\therefore \quad b=a\operatorname{ctg} A=15.2\operatorname{ctg} 13°58'=15.2\times 4.021=61.12$.

(3) $\dfrac{a}{c}=\sin A$;

$$\therefore \quad c=\frac{a}{\sin A}=\frac{15.2}{\sin 13°58'}$$

$$=\frac{15.2}{0.2414}=62.97.$$

例 4. 已知 $b=79.79$, $A=66°36'$；求 B, a 和 c.（图 1·16）

【解】 (1) $B=90°-A=90°-66°36'$

$=23°24'$.

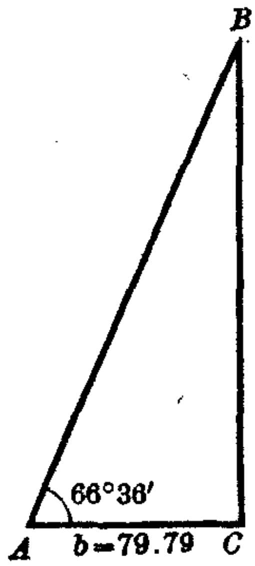


图 1·16

(2) $\dfrac{a}{b}=\operatorname{tg} A$;

$\therefore\quad a=b\operatorname{tg} A=79.79\operatorname{tg} 66°36'=79.79\times 2.311=184.4.$

(3) $\dfrac{b}{c}=\cos A$;

$$\therefore\quad c=\frac{b}{\cos A}=\frac{79.79}{\cos 66°36'}=\frac{79.79}{0.3971}=200.9.$$

在测量学里，常用到仰角和俯角这两个名词. 如图 1·17，

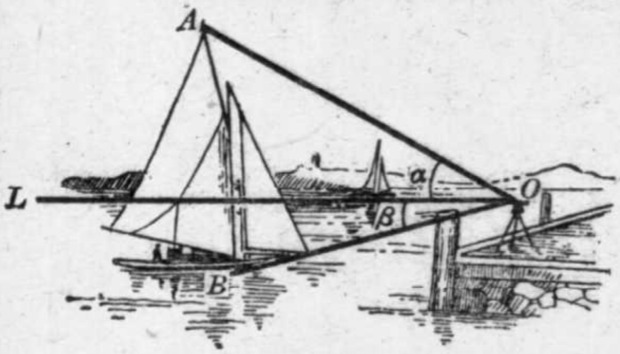


图 1·17

画出连结观测点 (O) 和目的物 (A 或 B) 的视线，并且经过观测点，画和视线在同一铅直面内的水平线 (OL). 当视线在水平线的上方时，它们间的角叫做目的物的**仰角**($\angle\alpha$). 当视线在水平线的下方时，它们间的角就叫做目的物的**俯角**($\angle\beta$).

例 5. 图 1·18 中，为了决定树 AE 的高度，在和 E 相距 47.0 米的 D 处，用测角仪器测得仰角 $\angle ABC=20°$. 设测角仪器 BD 的高度是 1.3 米，求树的高度(精确到 0.1 米).

【解】 在直角三角形 ABC 中，

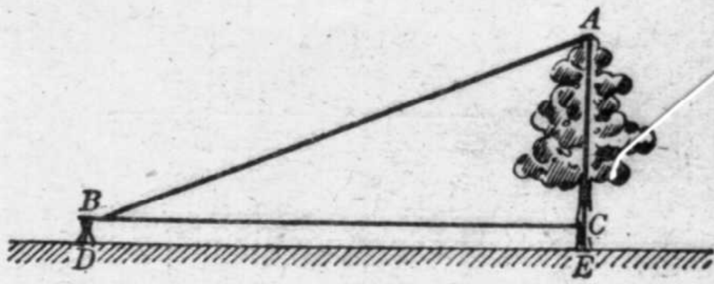


图 1·18

$$\frac{AC}{BC}=\operatorname{tg} B.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad AC&=BC\operatorname{tg} B\\&=DE\operatorname{tg} B\\&=47.0\operatorname{tg}20°=47.0\times 0.3640=17.1.\end{aligned}$$

$\therefore\quad AE=AC+CE=AC+BD=17.1+1.3=18.4.$

答：树高约为 18.4 米.

注　在解题时，测角仪器的高必须算进去．但习题中有时为了简便起见，并不指明测角仪器的高．在这种情形下，我们可以把观测点当做就在安置仪器的地面上．

例 6． 由高出海面 150 米的山岩上的一点 A (图 1·19)，观测海中一艘船 B 的俯角是 $\alpha=9°$．求山脚 C 到船只的距离(精确到 1 米)．

图 1·19

【解】 $\angle BAC=90°-9°=81°$.

$$\therefore\quad BC=150\ \mathrm{tg}\ 81°.$$

查表得 $\mathrm{tg}\ 81°=6.3138$.

$$\therefore\quad BC=150\times 6.3138=947.$$

答：山脚到船只的距离约为 947 米．

习　题　1·8(2)

1．解下列各直角三角形：

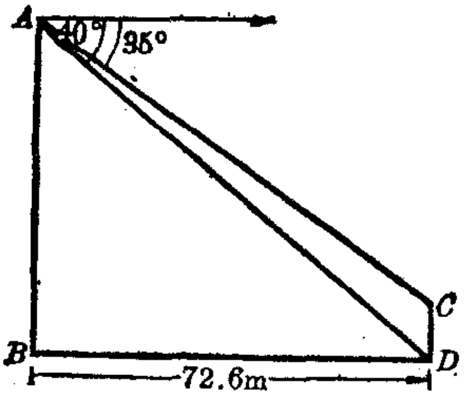
(1) 已知 $b=45.62$, $A=39°15'$;

(2) 已知 $b=100$, $B=67°20'$.

2．等腰三角形 ABC 的底角 $A=72°20'$，腰 AC 上的高为 14.7 cm，解这个三角形(精确到 0.01 cm)．

3．直角三角形 ABC 的锐角 $B=40°22'$，斜边 AB 上的高是 8.24 cm，解这个直角三角形．

4．菱形的一锐角等于 77°，短对角线的长为 12.40 cm，求这菱形



（第 6 题）

的边长.

5. 平面上有两个点 P 和 Q 彼此不能直达，但是能够望见．为了测量这两点间的距离，沿 PQ 的垂线 QR 取一点 R，测得 $QR=76.8\,\mathrm{m}$，$\angle PRQ=62^\circ10'$．求 PQ.

*6. 两个建筑物 AB 和 CD 的水平距离是 $72.6\,\mathrm{m}$，从其中一个建筑物的顶点 A 测得另一个建筑物的顶 C 的俯角是 35°，底 D 的俯角是 40°．求这两个建筑物的高(精确到 $0.01\,\mathrm{m}$).

3. 已知斜边和一条直角边

例 7. 已知 $b=35.47$，$c=45.93$；求 A，B 和 a.（图 1·20）

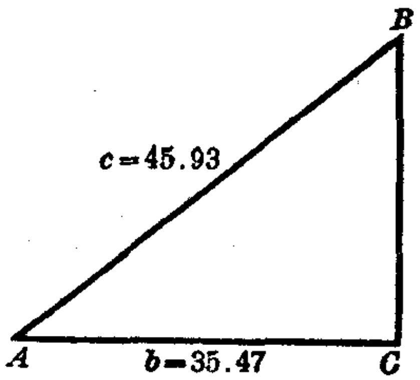


图 1·20

【解】 (1) $\cos A=\dfrac{b}{c}=\dfrac{35.47}{45.93}$

$=0.7723$;

$\therefore\quad A=39^\circ26'$.

(2) $B=90^\circ-A=90^\circ-39^\circ26'$

$=50^\circ34'$.

(3) $\because\quad a^2+b^2=c^2$;

$\therefore\quad a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{(c+b)(c-b)}$.

$c+b=81.40$，$c-b=10.46$，

$(c+b)(c-b)=851.4$.

$\therefore\quad a=\sqrt{851.4}=29.18$.

如果求出 c 的平方，b 的平方，再求它们的差，然后开方，那末计算就要麻烦得多.

例 8. 长 21 尺的木板，一端在地面上，另一端离开地面的高是 10.3 尺，求木板和地面所夹的角(精确到 1°).

【解】 设 AB 是长 21 尺的木板(图 1·21)，CB 是木板一

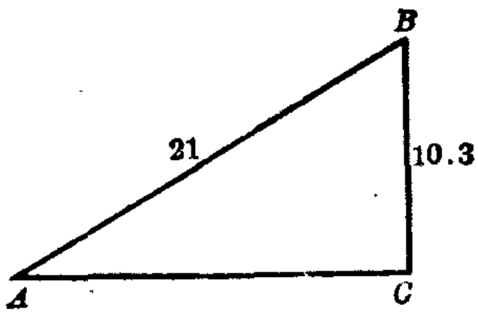


图 1·21

端离开地面的高度 10.3 尺，那末

$$\sin A=\frac{CB}{AB}=\frac{10.3}{21}=0.4905.$$

查表得到 $\angle A$ 的最接近的整数度数是 29°.

答：木板和地面所夹的角约为 29°.

习 题 1·8(3)

1．解下列各直角三角形：

(1) 已知 $a=50,\ c=70.71$;　　(2) 已知 $b=7,\ c=25$.

2．等腰三角形的周长为 26 cm，底上的高为 8 cm，求它的腰和底(精确到 0.001 cm)以及顶角.

3．一个正多边形的边长为 $5(\sqrt{5}-1)$ cm，外接圆的半径为 10 cm，求这个正多边形的边数．又它的内切圆半径等于多少?

*4．直角三角形 ABC 的斜边 $AB=21.72$ cm，$AC=16.80$ cm，求 AB 上的高和角 A 的平分线的长.

4．已知两条直角边

例 9．已知 $a=104.0,\ b=20.49$；求 $A,\ B$ 和 c．(图 1·22)

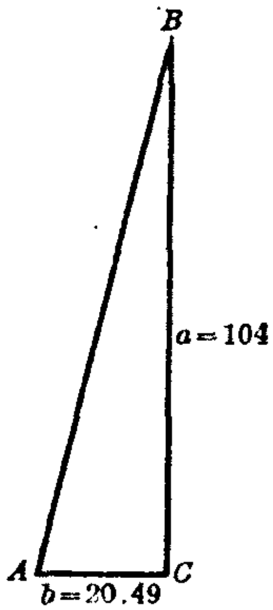


图 1·22

【解】 (1) $\operatorname{tg} A=\frac{a}{b}=\frac{104.0}{20.49}=5.076.$

$$\therefore\quad A=78°51'.$$

(2) $B=90°-A=90°-78°51'=11°9'$.

(3) $\sin A=\dfrac{a}{c}$;

$$\therefore\quad c=\frac{a}{\sin A}=\frac{104.0}{\sin 78°51'}=\frac{104.0}{0.9812}=106.0.$$

这里，我们当然也可以根据$c=\sqrt{a^2+b^2}$来求 c. 但这只有在 a 和 b 的数值比较简单时才适用. 当数值很繁时，还是用例题里的解法比较简便.

习 题 1·8(4)

1. 解下列各直角三角形:

(1) 已知 $a=\sqrt{5}$, $b=\sqrt{15}$;　　(2) 已知 $a=22.5$, $b=12$.

2. 矩形 $ABCD$ 中, $AB=25$, $BC=312$, 求它的外接圆的半径和两条对角线相交所成的锐角.

3. 等腰梯形的上底为 8 cm, 下底为 14 cm, 高为 7.5 cm, 求它的腰长和底角.

4. 锐角三角形 ABC 中, BC 上的高为 AD, 已知 $AD=12.30$ cm, $BD=8.48$ cm, $CD=9.27$ cm. 求这个三角形其余两边的长和三个角的大小.

本 章 提 要

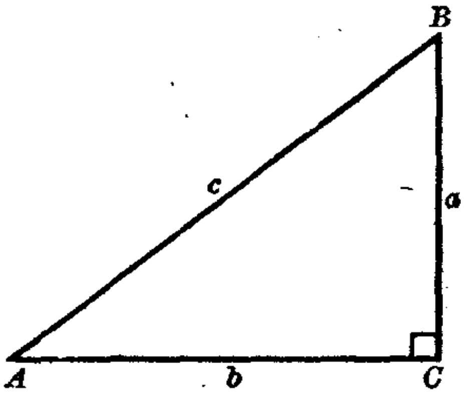


图 1·23

1. 锐角三角函数的定义

$$\sin A=\frac{a}{c},\ \cos A=\frac{b}{c},\ \operatorname{tg} A=\frac{a}{b},$$

$$\operatorname{ctg} A=\frac{b}{a},\ \sec A=\frac{c}{b},\ \operatorname{cosec} A=\frac{c}{a}.$$

2. $90°-A$ 和锐角 A 的三角函数间的关系

$$\sin(90°-A)=\cos A,$$
$$\cos(90°-A)=\sin A,$$

$$\operatorname{tg}(90^\circ-A)=\operatorname{ctg}A,\ \operatorname{ctg}(90^\circ-A)=\operatorname{tg}A,$$
$$\sec(90^\circ-A)=\operatorname{cosec}A,\ \operatorname{cosec}(90^\circ-A)=\sec A.$$

3. 几个特殊度数角的三角函数

A	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin A$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos A$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} A$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	不存在
$\operatorname{ctg} A$	不存在	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0
$\sec A$	1	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{2}$	2	不存在
$\operatorname{cosec} A$	不存在	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	1

4. 锐角的三角函数的变化:

锐角逐渐增大时 $\left\langle\begin{array}{l}\text{正弦, 正切, 正割逐渐增大;}\\ \text{余弦, 余切, 余割逐渐减小。}\end{array}\right.$

5. 解直角三角形的四种情形

已知	所		求
$c,\ A$	$B=90^\circ-A$	$a=c\sin A$	$b=c\cos A$
$a,\ A$	$B=90^\circ-A$	$b=a\operatorname{ctg}A$	$c=\frac{a}{\sin A}$
$c,\ a$	$\sin A=\frac{a}{c}$	$B=90^\circ-A$	$b=\sqrt{c^2-a^2}$ 或 $b=c\sin B$
$a,\ b$	$\operatorname{tg}A=\frac{a}{b}$	$B=90^\circ-A$	$c=\sqrt{a^2+b^2}$ 或 $c=\frac{a}{\sin A}$

复习题一

1. 设直角三角形的斜边和一条直角边的比是25:24，求最小角的六个三角函数.

2. 已知 $a=\sqrt{pq-q^2}$，$c=\sqrt{p^2-pq}$ $(p>q>0)$；求下列各式的值：

(1) $\sin^2 B+\cos^2 B$;　　(2) $\sec^2 A-\mathrm{tg}^2 A$;

(3) $\mathrm{cosec}^2 A-\mathrm{ctg}^2 A$.

3. 已知 $\sec A=\sqrt{\dfrac{3}{2}}$；求作锐角 A.

4. 不用查表，计算下列各式的值：

*(1) $\sin 37°30'\,\mathrm{tg}\,8°21'-\cos 52°30'\sin 49°7'+\sin 37°30'\sin 49°7'-\cos 52°30'\,\mathrm{ctg}\,81°39'$;

(2) $\dfrac{\sin 23°40'-\cos 66°20'}{\sin 23°40'+\cos 66°20'}$;

(3) $[\mathrm{tg}\,(50°+x)-\mathrm{ctg}\,(40°-x)][\sec x+\mathrm{cosec}\,(x+10°)]$ $(0°<x<40°)$.

5. 求证在圆内接四边形 $ABCD$ 中：

(1) $\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{C}{2}=\cos\dfrac{A}{2}+\cos\dfrac{C}{2}$;

(2) $\mathrm{tg}\dfrac{A}{2}+\mathrm{tg}\dfrac{B}{2}=\mathrm{ctg}\dfrac{C}{2}+\mathrm{ctg}\dfrac{D}{2}$.

6. 求下列各式的值：

(1) $\mathrm{tg}^2 30°+2\sin 60°\cos 45°+\mathrm{tg}\,45°-\mathrm{ctg}\,60°-\cos^2 30°$;

(2) $2p^2\sin^2 45°-pq\sec 60°+3q^2\,\mathrm{tg}^2 30°$;

(3) $\dfrac{4}{3}\mathrm{ctg}^2 30°+3\sin^2 60°-2\,\mathrm{cosec}^2 60°-\dfrac{3}{4}\mathrm{tg}^2 30°$.

7. 求适合下列各式的锐角 x：

(1) $2\cos(x-10°)=1$;　　(2) $\sqrt{3}\,\mathrm{tg}^2 x-4\,\mathrm{tg}\,x+\sqrt{3}=0$.

8. 比较下列各组三角函数值的大小(不用查表)：

(1) $\sin 27°$ 和 $\sin 31°$;　　(2) $\cos 27°$ 和 $\cos 31°$;

(3) $\cos\alpha$ 和 $\cos 2\alpha(0°<\alpha<45°)$;　　(4) $\mathrm{ctg}\,71°$ 和 $\mathrm{tg}\,35°$;

(5) $\sec 38°$ 和 $\mathrm{cosec}\,83°$.

9. 比较下列各题中 α 和 β 的大小(不用查表)：

(1) 已知 $\cos\alpha=0.7771$, $\cos\beta=0.7052$;

(2) 已知 $\sin\alpha=0.7771$, $\sin\beta=0.7779$;

(3) 已知 $\operatorname{ctg}\alpha=1.3010$, $\operatorname{tg}(90°-\beta)=0.9757$;

(4) 已知 $\operatorname{ctg}(90°-\alpha)=3.1025$, $\operatorname{tg}\beta=2.4502$.

10. 已知 $\cos\alpha=0.6975$, $\sin\beta=0.7328$; 求证 $\alpha+\beta>90°$.

11. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=0.4579$, $\operatorname{ctg}\beta=0.5497$; 求证 $\alpha+\beta<90°$.

12. 已知 $\sec\alpha>\operatorname{cosec}\beta$; 求证 $\alpha+\beta>90°$.

13. 化简 $p^2\sin 90°-2pq\cos 0°+q^2\cos 0°+2p\operatorname{tg}0°-q\operatorname{ctg}90°$.

14. 化简

$$m^3\sec 0°-m^2n\operatorname{tg}^2 60°\operatorname{cosec}90°+9mn^2\operatorname{ctg}^2 60°-n^3\sin^2 90°.$$

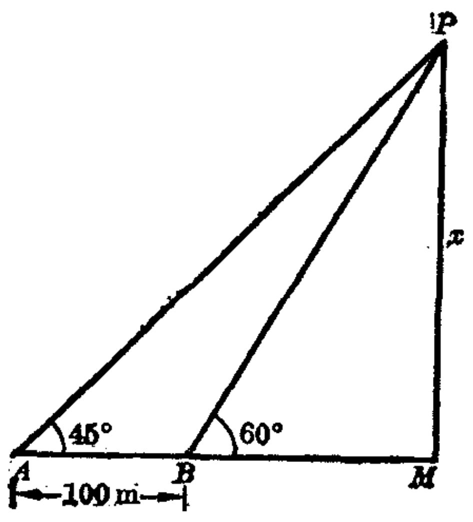
15. 一树的上段被风吹折与地面成 30° 的角，树根与树顶着地处相距 20 m; 求树原有的高度.

16. 在上题中，如果上段被折部分的长为 10.5 m，求树原有的高度. 被折部分与地面成 30° 的角.

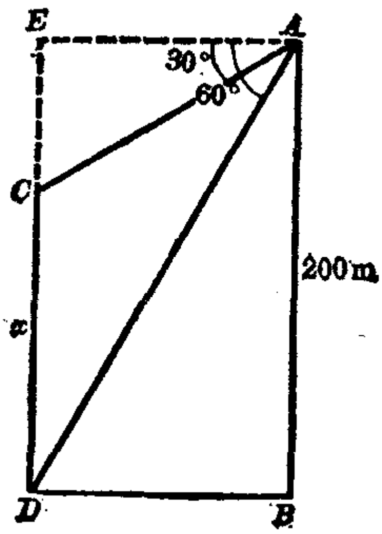
*17. 在平地上的一点，测得一塔尖的仰角为 45°; 向塔前进 100 m 又测得仰角为 60°; 求塔高及塔与第一测处的距离.

[提示：设 PM 为 x, 利用关系 $AM=PM$ 解得 x.]

*18. 在 200 m 高的峭壁上测得一塔的塔顶与塔基的俯角各为 30° 与 60°，求塔高.



(第 17 题)



(第 18 题)

19．山坡与地平面成 $33°17'$ 的角，某人上坡走了 87.5 m，问他上升了多少(即与地平面的垂直距离)？

20．在直角三角形 ABC 中，锐角 $A=33°17'$，斜边 AB 上的高为 15 cm，解这个三角形．

21．在直角三角形 ABC 中，斜边 AB 上的高 CD 等于 20.4 cm，$AD=18$ cm，解这个三角形．

22．正十六边形的外接圆的直径为 20 cm，求它的周长和内切圆的半径．

*23．梯形的上底为 11.82 cm，下底为 14.46 cm，两底角为 $70°14'$ 和 $75°26'$．求这梯形的两腰的长．

*24．A 是直角三角形中的一个锐角，求证 $\sin A+\cos A>1$．

第二章　任意角的三角函数

§2·1　大于90°的角和负角

我们在§1·6中已经说过，角可以看做是由一条射线绕着它的端点旋转而成的．在图2·1里，角AOB就是由一条射线从OA的位置开始，绕着端点O，旋转到OB而形成的．

如果图2·1中的射线绕着点O继续旋转，那末，形成的角AOB就逐渐增大，从锐角变成90°的角，再变成钝角，180°的角等等．当射线旋转了一周而又与OA重合的时候，所得的角就等于360°．

设想图2·1中的射线象脚踏车轮上的钢丝一样，它可以旋转一周后再继续旋转，这样就会得到大于360°的角．旋转两周以后，就得到大于720°的角．象这样继续下去，射线可以旋转三周，四周等等，而形成任何大小的角．

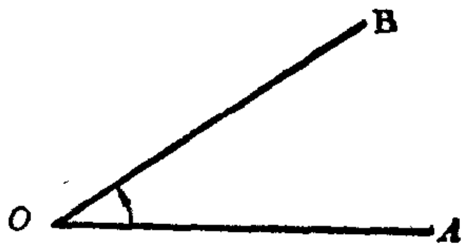


图　2·1

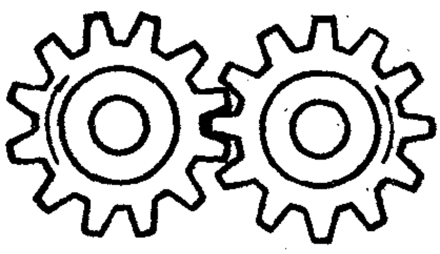


图　2·2

假使我们再把射线旋转的方向也考虑进去，那末角的概念不但可以推广到任何大小的角，还可以推广到负角．例如，图2·2中相互衔接而具有同样半径的两个齿轮，在转动的时

候，其中一个齿轮的半径旋转某一个角度，另一个就一定旋转同样的角度，但是它们旋转的方向相反. 如果我们只是说，在同一个时间里，两个齿轮的半径旋转的度数是一样的，那末，这就象把温度计的零上 2 度和零下 2 度一律说做 2 度一样，显然是不确切的. 为了解决这类问题，我们可以规定射线按照一个方向旋转所成的角是正的，而按照另一个方向旋转所成的角是负的. 通常我们规定：按照反时针方向旋转所成的角是正的角，按照顺时针方向旋转所成的角是负的角. 例如，在图 2·2 中，右边的一个齿轮旋转所得的角是正的，左边的一个齿轮旋转所得的角是负的.

射线按顺时针方向旋转一周，生成的角是从 $0°$ 到 $-360°$；旋转两周，就生成 $-360°$ 到 $-720°$ 的角. 这样下去，我们可以有任何大小的负角. 例如时钟的分针一昼夜所转过的角是 $-8640°$.

这样，我们就扩大了角的概念. 我们有了任意大小的角（正角，负角和等于 $0°$ 的角）.

例 1. 画出下列各角：$940°$，$-790°$.

【解】 940 除以 360，得到不完全的商 2 和余数 220. 所以

$$940°=2\times360°+220°.$$

这就是说，射线按照反时针方向旋转 2 周后，继续按反时针方向旋转 $220°$，就得到 $940°$ 的角（图 2·3）.

同样，

$$\begin{aligned}-790°&=-(2\times360°+70°)\\&=-2\times360°-70°.\end{aligned}$$

因此，射线按照顺时针方向旋转 2 周后再按顺时针方向旋转 $70°$，就得到 $-790°$ 的角（图 2·4）.

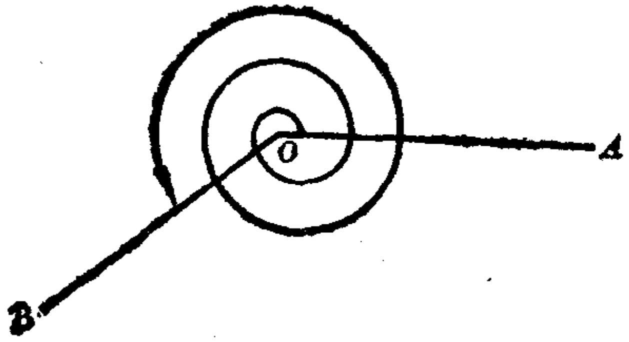


图 2·3

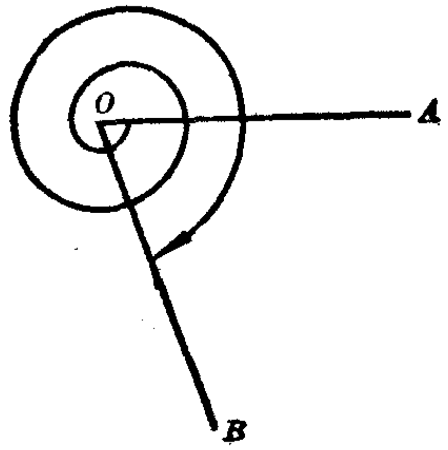


图 2·4

在这个例题里，我们看到，如果始边相同，那末 940° 角的终边和 220° 角的终边是相同的；$-790°$ 角的终边和 $-70°$ 角的终边也是相同的.

现在我们来研究相反的问题：如果始边相同，那末，有哪些角的终边和 220° 角的终边是相同的呢？显然，除了 940° 以外，还有其他的角. 因为当射线按反时针方向旋转 220° 以后，不论它再按反时针方向或者顺时针方向旋转整数的周数，它的终了位置还是在 220° 角的终边上. 由此看来，和 220° 角的终边相同的一切角可以用 $n\cdot 360°+220°$ 来表示，这里 n 是正整数，负整数或者零. 当 n 是正整数时，它表示射线从 220° 角的终边起，再按反时针方向旋转整数的周数. 当 n 是负整数时，它表示射线从 220° 角的终边起再按顺时针方向旋转整数的周数. 当 $n=0$ 时，它就表示 220° 角本身.

同样，和 $-70°$ 角的终边相同的一切角可以用 $n\cdot 360°-70°$ 来表示.

一般地说，如果始边相同，那末和角 α 终边相同的角连同角 α 本身在内，可以用下面的式子表示：

$$n\cdot 360°+\alpha \quad (n \text{ 是整数}).$$

例 2. 机器的轮子在3分钟内旋转9000周，它的角速度是每秒几度？

【解】 $\frac{9000\times360^\circ}{3\times60}=18000^\circ.$

答：轮子的角速度是每秒 18000°.

习 题 2·1

1. 用量角器作出下列各角：

$$-55^\circ,\ -265^\circ,\ 400^\circ,\ 1000^\circ,\ -512^\circ.$$

2. 若下列各角有相同的始边，判别哪些角有相同的终边.

$$105^\circ,\ -75^\circ,\ 465^\circ,\ -615^\circ,\ 285^\circ.$$

3. 当时钟上指出3点，6点和8点的时候，把时针作为角的始边，写出分针与时针所成角的一般形式.

4. 把和 -90°，-220° 与 -3000° 的角的终边相同的一切角写成 $n\cdot360^\circ+\alpha$ 的形式，但必须使 $0^\circ\leqslant\alpha<360^\circ$.

5. 飞轮在4小时内旋转 72×10^4 周，它的角速度是每秒几度？

§2·2 直角坐标系

我们在第一章中知道，对于任何一个锐角，可以用它所在的直角三角形两边的比来定义它的三角函数. 在扩大了角的概念以后，我们很自然地也要对于任意的角，规定它们的三角函数的意义. 三角函数的新的定义要用到代数中关于直角坐标系的知识. 为了便于读者自学，我们在这一节里把有关直角坐标系的知识从头讲一讲.

1. 基本概念 要把一只棋子放到棋盘上某一点处，一定要指明，这一点在横的第几格，竖的第几行处. 请电器工人装一个开关，比方说，告诉他要装在窗子右边离窗框0.5米，

离地 1.5 米的地方，他就会装在你所需要的地方．这样看来，平面内的点的位置是可以用两个数来确定的．

一般地说，我们可以在平面内画互相垂直的两条直线 Ox 和 Oy（图 2·5）．取任意一条线段作为长度单位，再规定两条直线的正方向如图中的箭头所示．对于 Ox 上从 O 起截取的每一条线段，我们使它对应着一个正数或者负数，这个数的绝对值是线段的长；向右截取的对应着正数，向左截取的对应着负数．同样，在 Oy 上，从 O 起，使向上截取的线段对应着正数，向下截取的对应着负数．这样一来，在两条直线上，每一条以 O 为一个端点的线段就对应着一个数．例如，在图 2·5 中，线段 OA 对应着 $+4$，线段 OB 对应着 -3，线段 OD 对应着 -5．

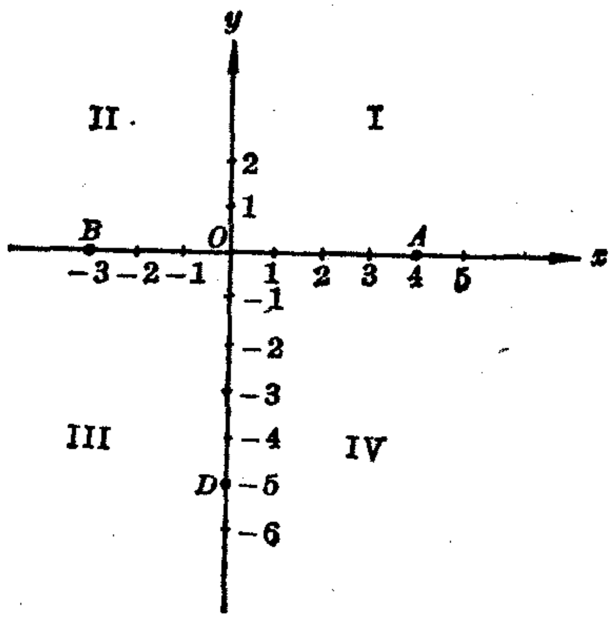


图 2·5

设平面内有一点 P．从点 P 作 Ox 的垂线 MP 和 Oy 的垂线 NP（图 2·6）．用取定的长度单位量 OM 和 ON，并且放上应有的正负号以后，得

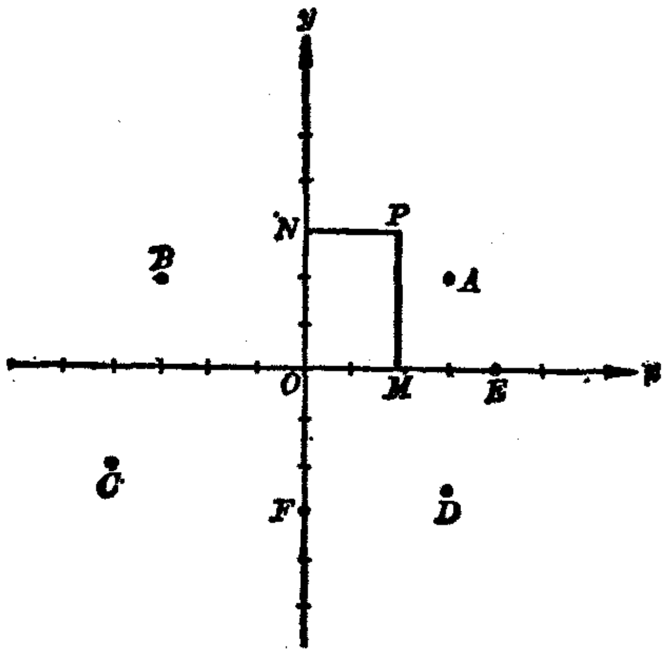


图 2·6

到两个数．我们把 OM 所对应的数叫做点 P 的**横坐标**，ON 所对应的数叫做点 P 的**纵坐标**．例如在图 2·6 中，点 P 的横坐标是 2，纵坐标是 3．同样可以求得 A，B，C，D 各点的横坐标和纵坐标．

一个点的横坐标和纵坐标总起来叫做这个点的**坐标**．我们可以用 $P(2, 3)$ 来表示点 P 的坐标．括号里的第一个数表示横坐标，第二个数表示纵坐标．例如，在图 2·6 中，点 A 的坐标是 $(3, 2)$，点 B 的坐标是 $(-3, 2)$，点 C 的坐标是 $(-4, -2)$，点 D 的坐标是 $(3, -2.5)$．

很明显，Ox 上任何一点的纵坐标都等于零，Oy 上任何一点的横坐标都等于零．例如，在图 2·6 中，点 E 的坐标是 $(4, 0)$，点 F 的坐标是 $(0, -3)$．点 O 的坐标是 $(0, 0)$．

由此可知，利用平面内互相垂直的两条直线，可以按照上面的规定，用两个数来指出平面内任意一点的位置．

反过来，知道了一个点的坐标，我们也就能够画出这个点．

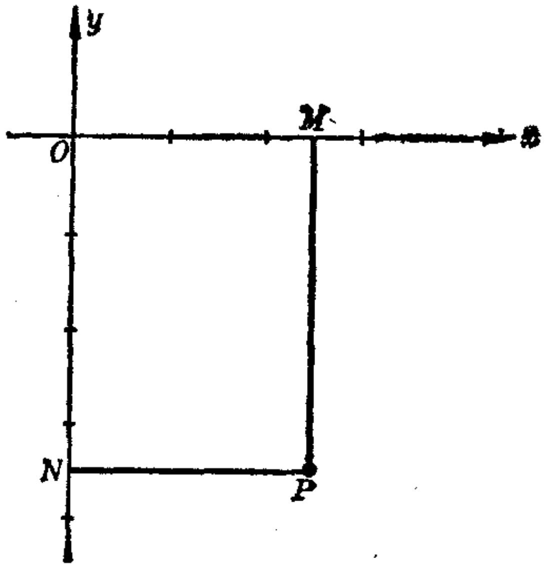


图 2·7

例如，要画出点 $P(2.5, -3.5)$，我们在 Ox 上，从 O 起向右截取 2.5 个长度单位，得到点 M；在 Oy 上，从 O 起向下截取 3.5 个长度单位，得到点 N（图 2·7）．过 M 作 Ox 的垂线，过 N 作 Oy 的垂线．这两条垂线的交点就是所求的点 P．

我们把 Ox 叫做**横坐标轴**或者 x **轴**，Oy 叫做**纵坐标轴**或者 y **轴**，点 O 叫做**坐标原**

点. x 轴和 y 轴把平面所分成的四个部分叫做象限. 各象限的编号从右上方的一个开始，按照反时针方向，分别叫做第一象限，第二象限，第三象限和第四象限(参看图 2·5). 各象限里点的坐标的符号如下表所示:

象　　限	横　坐　标	纵　坐　标
I	+	+
II	−	+
III	−	−
IV	+	−

设从点 P 所作的 x 轴的垂线交 x 轴于 M. 如果我们规定: 当线段 MP 在 x 轴的上方时，令它的长带上正号，在 x 轴的下方时，令它的长带上负号，那末 MP 所对应的数显然就是点 P 的纵坐标. 采用这个规定，求已知点的坐标或者画出已知坐标的点就更简便了.

例 1. 求图 2·8 中点 P 的坐标.

【解】 从 P 作 x 轴的垂线 MP. 用取定的长度单位量 OM 和 MP. 从图中可以看到，OM 所对应的数是 -3，MP 所对应的数是 4. 所以点 P 的横坐标是 -3，纵坐标是 4，就是说，点 P 的坐标是 $(-3, 4)$.

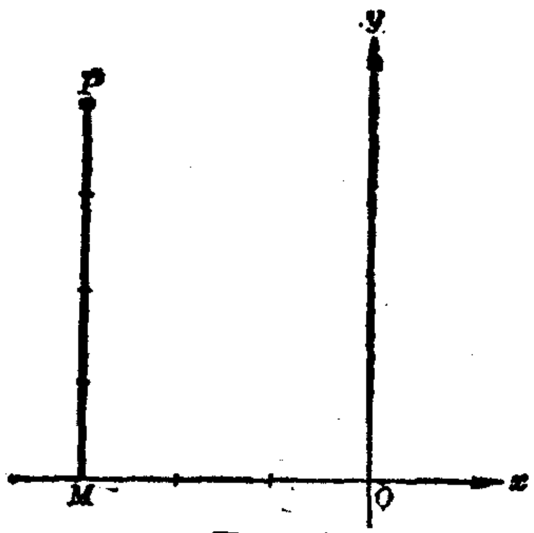


图 2·8

例 2. 画出点 P $(-5, -3.5)$.

【解】 在 x 轴上从 O 起向左截取线段 OM 使它的长等于 5 个长度单位. 在点 M 处

作 x 轴的垂线,并且向下截取线段 MP 使它的长等于3.5个长度单位(图2·9). OM 所对应的数是 -5, MP 所对应的数是 -3.5, 点 P 就是所求的点.

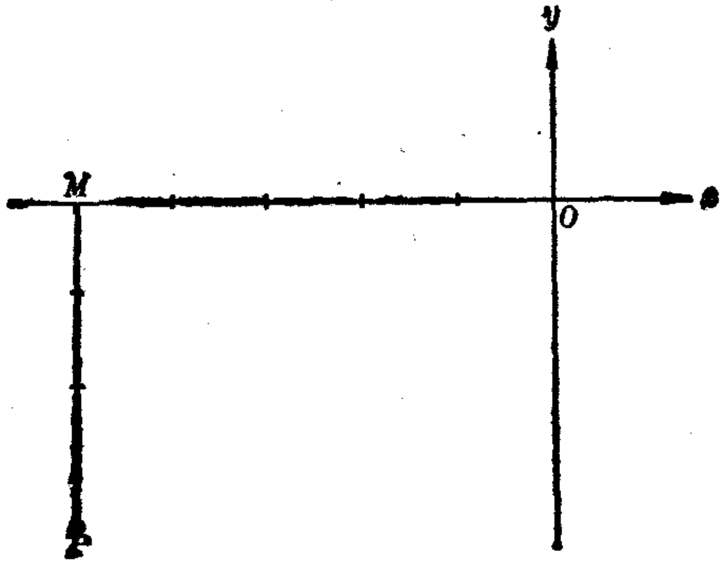


图 2·9

2. 从原点到已知点的距离 设点 P 是平面内的一点. 我们用 r 表示 OP 的长, 并且规定 r 总是正的. 我们很容易看出,不论点 P 在那一个象限里, 或者在坐标轴上, 如果已经知道它的坐标 (x, y), 那末 r 可以根据下面的公式计算出来:

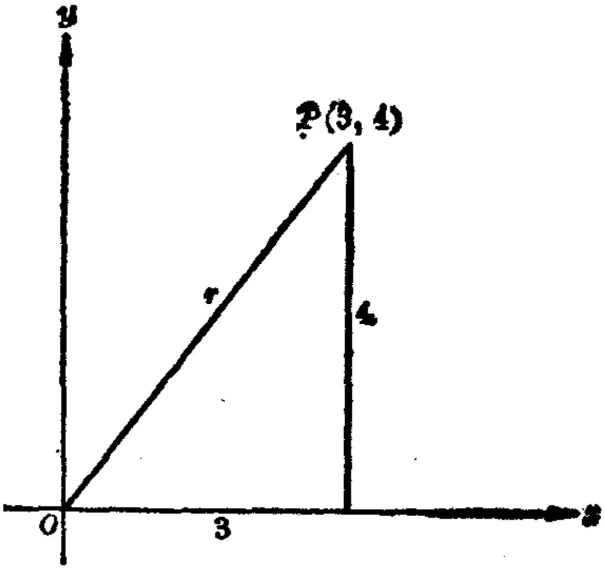


图 2·10

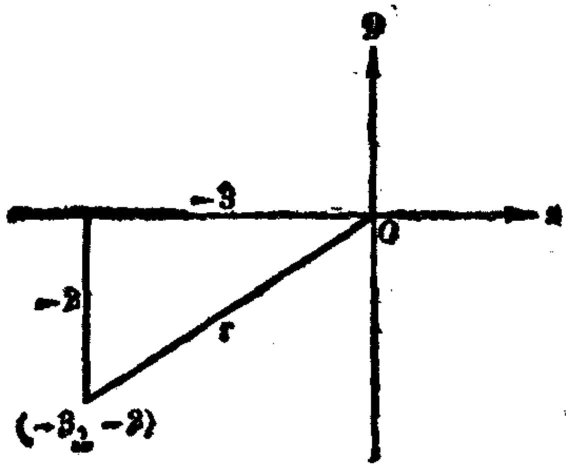


图 2·11

$$r=\sqrt{x^2+y^2}.$$

例 3. 求从原点到点(3, 4)的距离(图 2·10).

【解】 $r=\sqrt{3^2+4^2}=\sqrt{25}=5.$

例 4. 求从原点到点(−3, −2)的距离(图 2·11).

【解】 $r=\sqrt{(-3)^2+(-2)^2}=\sqrt{9+4}=\sqrt{13}=3.6.$

习　题　2·2

1. 在坐标平面上画出下列各点:

$P_1(5, -\sqrt{2})$;　$P_2(-3, \sqrt{3})$;　$P_3(-1.3, -\sqrt{5})$;

$P_4(-5, 0)$; $P_5(0, -3)$; $P_6(0, 3.3)$; $P_7(-\sqrt{2}, -\sqrt{3})$.

2. 求从原点到下列各点的距离:

(1) $(-2, \sqrt{5})$;　(2) $(3, -4)$;　(3) $(a, -2a)$;

(4) $(1, 7)$;　(5) $(0, -3)$;　(6) $(-\sqrt{5}, 0)$.

3. 写出以 Ox 的正向为始边, OP 为终边(O 为原点)的角的一般形式:

(1) $P(1, \sqrt{3})$;　(2) $P(2, -2)$;　(3) $P(-\sqrt{3}, -1)$;

(4) $P(-3, 3)$;　(5) $P(0, -3.5)$;　(6) $P(4, 0)$;

(7) $P(0, 3)$;　(8) $P(-2, 0)$.

4. 某点的横坐标为 3, 这点到原点的距离为 5, 求它的纵坐标.

§2·3　任意角的三角函数

现在我们来说明对于任意的角，怎样规定它们的三角函数的意义.

设有一个锐角 α. 我们以它的顶点为原点，以它的始边(就是射线原来的位置)为 x 轴的正方向，作直角坐标系(图 2·12).

在角 α 的终边（就是射线最后的位置）上任意取一点 P. 设点 P 的坐标为 (x, y), OP 的长为 r. 根据锐角三角函数的定义，我们知道

$$\sin\alpha=\frac{y}{r}, \tag{1}$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}, \tag{3}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}, \tag{4}$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x}, \tag{5}$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y}. \tag{6}$$

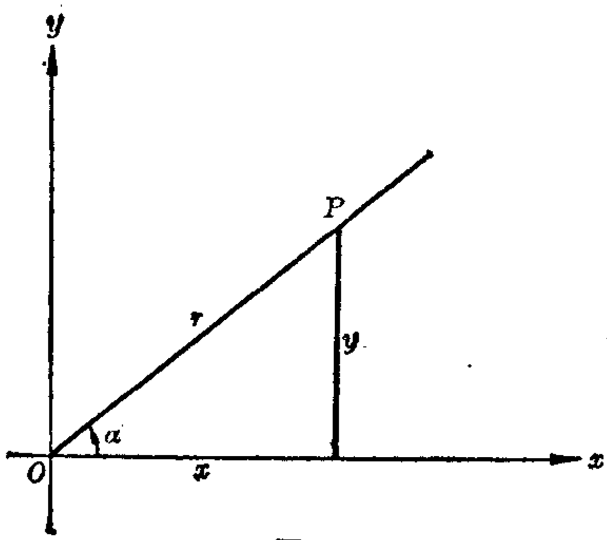


图 2·12

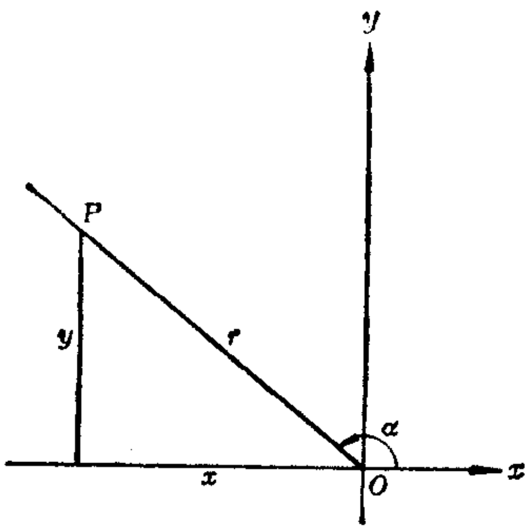


图 2·13

设想射线继续按反时针方向旋转，成为大于 90° 而小于 360° 的角. 那末，角 α 的终边就将落到第一象限的外面去，如图 2·13, 2·14, 2·15 所示. 不论角 α 的终边落在哪一个象限里，或者在坐标轴上，我们仍可以取终边上的任意一点，而

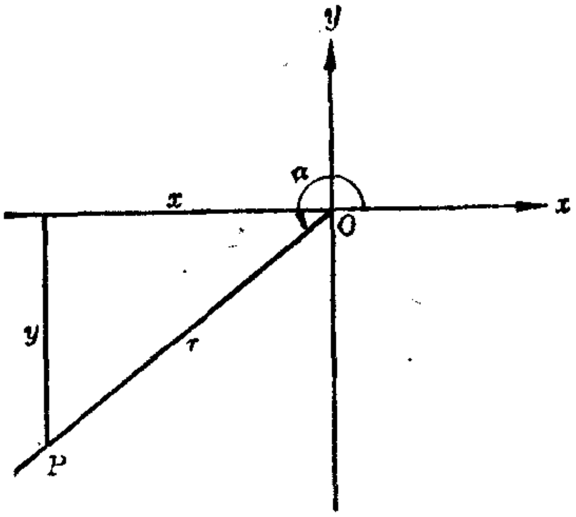


图 2·14

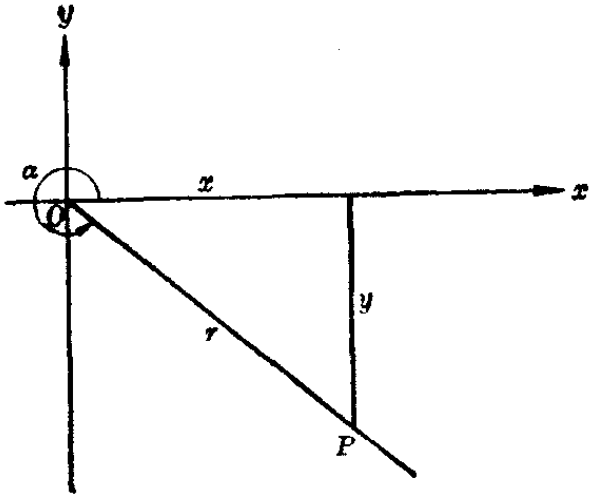


图 2·15

把锐角三角函数的定义推广到这些角上面去．就是说，我们仍旧把公式(1)到(6)里的六个比分别叫做角 α 的正弦，余弦，正切，余切，正割和余割．

进一步，我们还可以使公式(1)到(6)适用于任意大小的角(正角和负角)．这就是说，如果任何一个角 α 的终边上一点 P 的坐标是 (x, y)，原点到点 P 的距离是 r，那末角 α 的三角函数仍旧是公式(1)到(6)里的六个比．

这样，我们把三角函数的概念就从锐角推广到任意大小的角了．

例 设角 α 的顶点是 O，始边是 Ox，它的终边上一点 P 的坐标是 $(-4, -3)$，求角 α 的六个三角函数．

【解】 $r=\sqrt{(-4)^2+(-3)^2}=\sqrt{25}=5$．

因此，

$$\sin\alpha=\frac{-3}{5}=-\frac{3}{5},\quad \cos\alpha=\frac{-4}{5}=-\frac{4}{5},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{-3}{-4}=\frac{3}{4},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{-4}{-3}=\frac{4}{3},$$

$$\sec\alpha=\frac{5}{-4}=-\frac{5}{4},\ \operatorname{cosec}\alpha=\frac{5}{-3}=-\frac{5}{3}.$$

图 2·16 中画出的角 α 是小于 360° 的正角. 根据我们所规定的任意角的三角函数的意义,可以知道,不论角 α 是正角还是负角,只要它的终边和图 2·16 中的 OP 重合,那末,它的六个三角函数都和上面算出来的结果一样.

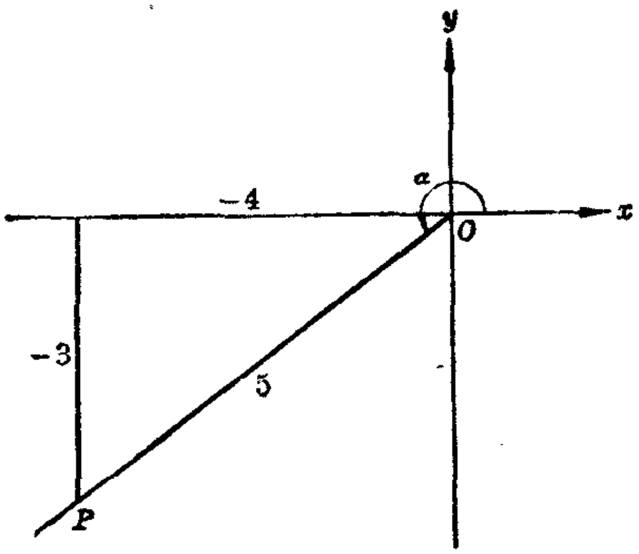


图 2·16

这里要注意,终边上所取点 P 的位置不同,会影响到 r, x 和 y 的值. 但是我们容易看出,只要终边的位置确定,不论点 P 是终边上的哪一点,r, x 和 y 这三个数中任意两个数的比还是不变的. 换句话说,任意角的三角函数跟着角的大小而确定,和点 P 在终边上的位置没有关系.

习 题 2·3

1. 设角 α 的顶点是 O, 始边是 Ox, 它的终边上一点 P 的坐标是 $(1,\ -7)$, 求角 α 的六个三角函数.

2. 设角 α 的顶点是 O, 始边是 Ox, 它的终边上一点 P 的坐标是 $(-7,\ 1)$, 求角 α 的正弦,余弦,正切和余切. 又如果点 P 的坐标是 $(-10.5,\ 1.5)$, 这些三角函数值有没有变化?为什么?

3. 设角 α 的顶点是 O, 始边是 Ox, 它的终边上一点 P 的坐标是 $(3a,\ 4a)$, 求角 α 的六个三角函数. 并分别按照 $a>0$ 和 $a<0$ 求出它们的值.

*4. 求顶点为 O, 始边为 Ox, 终边分别为直线 $y=-2x$ 的第二象限部分和第四象限部分的角的六个三角函数.

§2·4 三角函数值的符号

我们已经知道，在研究任意角的三角函数时，角的始边要固定为 x 轴的正方向. 至于它的终边，根据角的大小，可以在任何象限里，或者在坐标轴上.

锐角的终边在第一象限，终边上任何一点的横坐标，纵坐标都是正的，所以任何锐角的三角函数值都是正的.

当角的终边在其他的象限里时，根据各象限里点的坐标符号的规定，以及三角函数的定义，可以知道，它的三角函数的值就不一定是正的了.

记清楚各象限内点的横坐标 x，纵坐标 y 的符号，并且记住原点到任何一点的距离 r 都是正的，就很容易根据三角函数的定义，确定各个函数的符号.

下表所列是角 α 的三角函数值的符号：

角 α 的终边所在的象限	x	y	r	$\sin\alpha=\frac{y}{r}$	$\cos\alpha=\frac{x}{r}$	$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$	$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$	$\sec\alpha=\frac{r}{x}$	$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y}$
I	+	+	+	+	+	+	+	+	+
II	−	+	+	+	−	−	−	−	+
III	−	−	+	−	−	+	+	−	−
IV	+	−	+	−	+	−	−	+	−

下面再来研究角的终边在坐标轴上的情形. 很明显的，当角的终边分别落在 x 轴的正方向，y 轴的正方向，x 轴的负方向，y 轴的负方向的时候(图 2·17)，

它的正弦的值分别是：0, 1, 0, −1；

它的余弦的值分别是：1, 0, −1, 0；

它的正切的值分别是：0, 不存在, 0, 不存在；

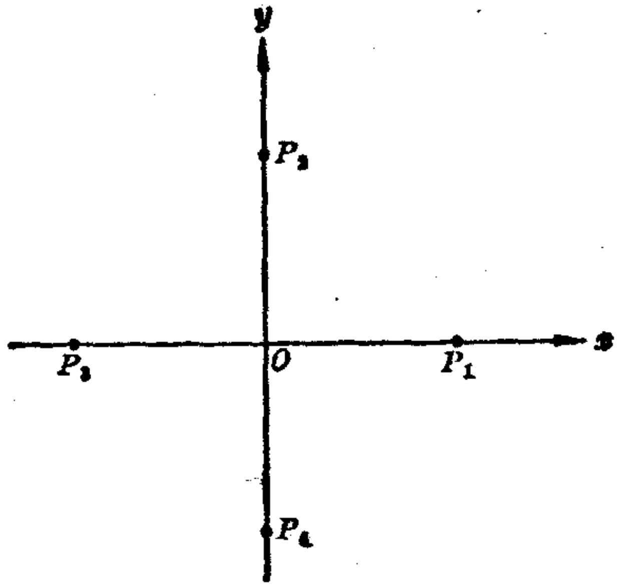


图 2·17

它的余切的值分别是：不存在，0，不存在，0；
它的正割的值分别是：1，不存在，-1，不存在；
它的余割的值分别是：不存在，1，不存在，-1.

$0°\sim360°$ 间这些角的三角函数值，可以列成下表：

	0°	90°	180°	270°
$\sin\alpha$	0	1	0	-1
$\cos\alpha$	1	0	-1	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	不存在	0	不存在
$\operatorname{ctg}\alpha$	不存在	0	不存在	0
$\sec\alpha$	1	不存在	-1	不存在
$\operatorname{cosec}\alpha$	不存在	1	不存在	-1

习 题 2·4

1．(1) 120° 角的哪些三角函数值是负的？ (2) 280° 角的哪些三角函数值是正的？(3) 560° 角的哪些三角函数值是负的？

2．设(1) $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的符号相反，(2) $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\sin\alpha$ 的符号相同，(3) $\cos\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\alpha$ 的符号相反；α 应当在怎样的范围内变化（设 α 是小

于 360° 的正角)?

3．设(1) $\frac{\sin\alpha}{\operatorname{tg}\alpha}<0$, (2) $\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\cos\alpha}<0$, (3) $\sin\alpha\cos\alpha>0$; 角 α 的终边应当在哪些象限?

4．按照绝对值来说：(1) $\sec\alpha$ 能否小于 $\operatorname{tg}\alpha$? (2) $\sin\alpha$ 能否大于 $\operatorname{tg}\alpha$? (3) $\operatorname{cosec}\alpha$ 能否小于 $\operatorname{ctg}\alpha$? (4) $\cos\alpha$ 能否大于 $\operatorname{ctg}\alpha$? 并加以解释.

5．设 α 的终边在第三象限内，决定下列各式的符号：(1) $\sin\alpha+\cos\alpha$; (2) $\operatorname{tg}\alpha-\sin\alpha$; (3) $\cos\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$; (4) $\sec^2\alpha+\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha$.

6．求下列各式的值：

(1) $5\sin 90°+2\cos 0°-3\sin 270°+10\cos 180°$;

(2) $a^2\cos 270°+b^2\sin 0°+2ab\operatorname{ctg} 270°$;

(3) $m\sin 270°-\frac{n\sin 90°}{\cos 180°}+k\operatorname{tg} 180°$;

(4) $a^2\cos 0°-b^2\sin 270°+ab\cos 180°-ab\cos 0°$;

(5) $a^2\sin 90°+2ab\cos 180°+\frac{b^2}{\cos^2 0°}$;

(6) $\sin 270°-2\cos 0°-\operatorname{tg} 180°$.

§2·5 已知某角的一个三角函数的值，求作角

根据任意角的三角函数的定义，只要知道角的终边上一点的坐标，就可以求出这个角的三角函数的值．现在我们来研究反面的问题：知道了某角的一个三角函数的值，怎样画出这个角?举例说明如下：

例 1．已知 $\sin\alpha=\frac{1}{2}$, 求作角 α.

【解】 已知正弦的值是正的．我们知道，当角的终边在第一或者第二象限时，它的正弦的值是正的．因此，求作的角

的终边在第一或者第二象限. 又因为 $\sin\alpha=\frac{y}{r}$, 所以 $\frac{y}{r}=\frac{1}{2}$.

我们可以在 x 轴的上方,作平行于 x 轴并且距离等于 1 个长度单位的直线(图 2·18). 这条直线上任何一点的纵坐标都等于 1. 以 O 为圆心, 以 2 个长度单位为半径, 作弧交所作的直线于 P_1 和 P_2. 连结 OP_1 和 OP_2, 就得到小于 $360°$ 的两个正角 α_1 和 α_2. 这两个角都适合于已知条件,并且始边为 Ox, 终边为 OP_1 或者 OP_2 的任何正角或者负角也都是所求的角.

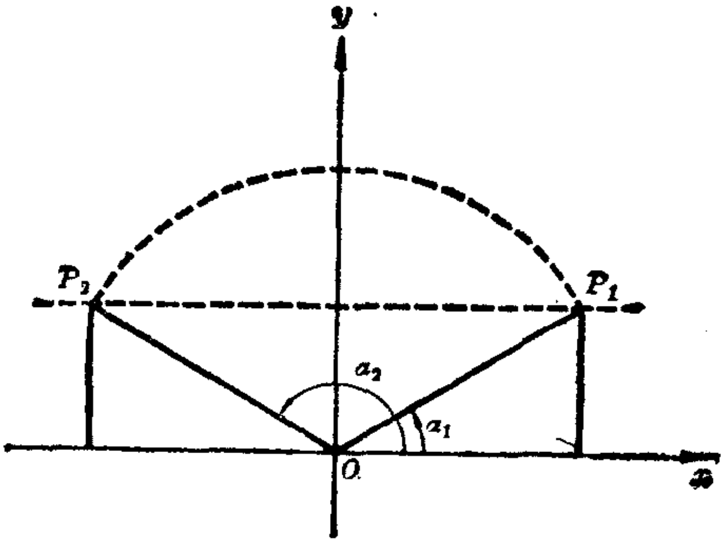


图 2·18

例 2. 已知 $\cos\alpha=-0.6$, 求作角 α.

【解】 因为已知余弦的值是负的, 所以求作的角的终边在第二或者第三象限内. 又因为 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$, 所以 $\frac{x}{r}=-0.6=\frac{-3}{5}$.

在 y 轴的左方作平行于 y 轴并且距离等于 3 个长度单位的直线(图 2·19). 以 O 为圆心, 以 5 个长度单位为半径, 作弧交所作的直线于 P_1 和 P_2. 连结 OP_1 和 OP_2, 就得到小于

360° 的两个正角 α_1 和 α_2. 这两个角都适合于已知条件，并且始边为 Ox 终边为 OP_1 或者 OP_2 的任意角也都是所求的角.

例 3. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=2\dfrac{1}{2}$, 求作角 α.

【解】 因为已知正切的值是正的，所以求作的角的终边在第一或者第三象限内. 又因为 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{y}{x}$, 所以 $\dfrac{y}{x}=2\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$.

在第一象限作点 $P_1(2,5)$, 在第三象限作点 $P_2(-2,-5)$ (图 2·20). 连结 OP_1 和 OP_2, 就得到小于 360° 的两个正角 α_1 和 α_2. 这两个角都适合于已知条件，并且始边为 Ox 终边为 OP_1 或者 OP_2 的任意角也都是所求的角.

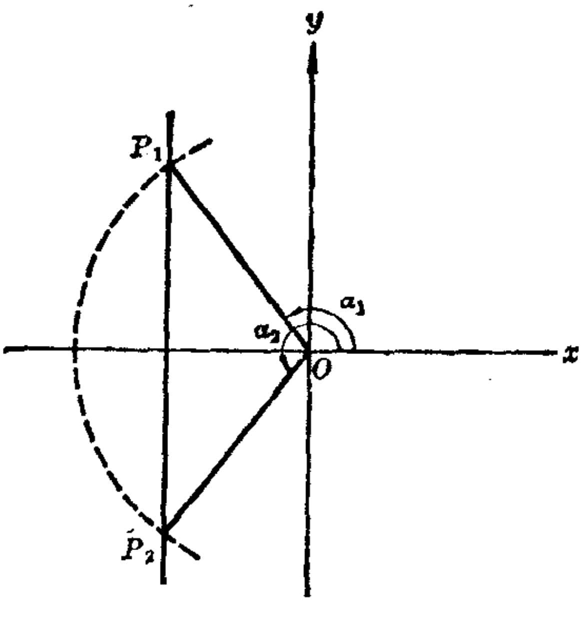


图 2·19

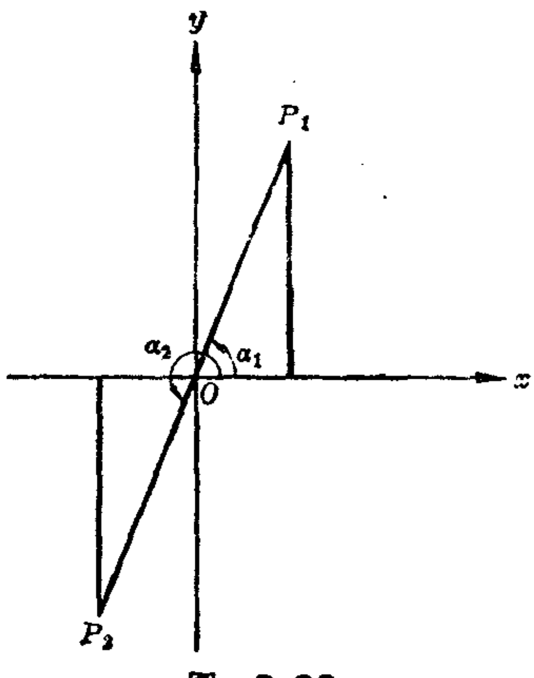


图 2·20

例 4. 已知 $\operatorname{ctg}\alpha=-2$, 求作角 α.

【解】 因为已知余切的值是负的，所以求作的角的终边

在第二或者第四象限内．又因为 $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$，所以 $\frac{x}{y}=-2$.

在第二象限作点 $P_1(-2,\ 1)$，在第四象限作点 $P_2(2,\ -1)$（图 2·21）．连结 OP_1 和 OP_2，就得到小于 $360°$ 的两个正角 α_1 和 α_2．这两个角都适合于已知条件，并且始边为 Ox 终边为 OP_1 或者 OP_2 的任意角也都是所求的角.

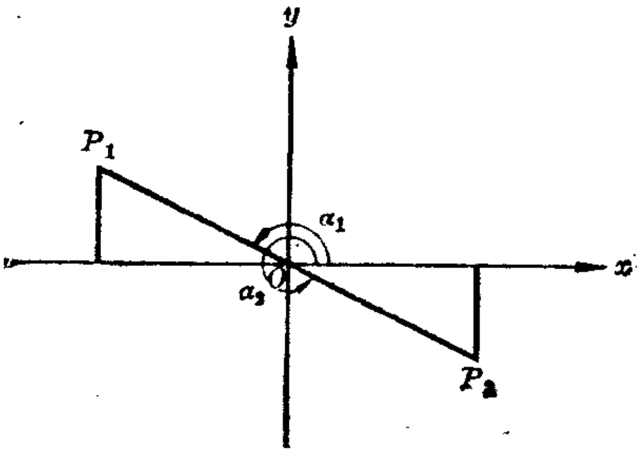


图 2·21

习 题 2·5

1．作出角 α 的终边，已知:

(1) $\cos\alpha=0.8$;　　(2) $\sin\alpha=-\frac{2}{3}$;　　(3) $\operatorname{tg}\alpha=-1.25$;

(4) $\operatorname{ctg}\alpha=2$;　　(5) $\sec\alpha=-2$;　　(6) $\operatorname{cosec}\alpha=1.4$.

2．作出适合等式 $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{5}{12}$ 的角 α_1 和 α_2，并求 $\sin\alpha_1$，$\cos\alpha_1$，$\sin\alpha_2$ 和 $\cos\alpha_2$ 的值.

3．已知 $\sin\alpha=-\frac{24}{25}$，作出角 α；并求 $\operatorname{tg}\alpha$ 的值.

*4．作出适合下列各等式的角 α 所有的终边:

(1) $|\sin\alpha|=0.75$;　　(2) $|\cos\alpha|=\frac{3}{7}$;

(3) $|\operatorname{tg}\alpha|=1.2$.

§2·6 $n\cdot360^\circ+\alpha$ 与任意角 α 的三角函数间的关系

我们知道，0° 到 90° 的三角函数值是能够直接从三角函数表中查到的．但是大于 90° 的角和负角的三角函数值，就不能够直接从三角函数表里查得．怎样求任意角的三角函数呢？从这一节起，我们来解决这个问题．

在 §2·3 中，我们知道，根据任意角的三角函数的定义，所有始边和终边相同的角的各个三角函数值完全相同．例如，-30° 和 330° 的角当始边相同时，终边也相同．因此，

$$\sin(-30^\circ)=\sin 330^\circ=-\frac{1}{2},$$

$$\cos(-30^\circ)=\cos 330^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

等等．

在 §2·1 中，我们又知道和角 α 始边相同，终边也相同的一切角可以用 $n\cdot360^\circ+\alpha$ 来表示．所以，$n\cdot360^\circ+\alpha$ 的三角函数值和 α 的三角函数值完全相同．就是说，对于任意角 α 和任意整数 n，我们都有

$$\boldsymbol{\sin(n\cdot360^\circ+\alpha)=\sin\alpha,}$$

$$\boldsymbol{\cos(n\cdot360^\circ+\alpha)=\cos\alpha,}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}(n\cdot360^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{ctg}(n\cdot360^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha,}$$

$$\boldsymbol{\sec(n\cdot360^\circ+\alpha)=\sec\alpha,}$$

$$\boldsymbol{\operatorname{cosec}(n\cdot360^\circ+\alpha)=\operatorname{cosec}\alpha.}$$

利用这一组公式，我们可以化任何正角的三角函数为小于 360° 的正角的三角函数.

例 化 $\sin 850^\circ$ 为小于 360° 的正角的三角函数.

【解】 $\sin 850^\circ = \sin(2\times 360^\circ + 130^\circ) = \sin 130^\circ$.

习 题 2·6

1. 化下列各三角函数为小于 360° 的正角的三角函数:

(1) $\sin 1112^\circ$; (2) $\cos 2000^\circ$; (3) $\operatorname{tg} 892^\circ 30'$;

(4) $\operatorname{ctg} 567^\circ$; (5) $\sec 3700^\circ$; (6) $\operatorname{cosec} 947^\circ$.

2. 下列三角函数中,哪些有相同的值?

$\sin 390^\circ$, $\operatorname{tg} 415^\circ$, $\sin 870^\circ$, $\sin 750^\circ$, $\operatorname{ctg} 585^\circ$, $\cos 420^\circ$.

3. 将下列负角的三角函数化成小于 360° 的正角的三角函数:

(1) $\sin(-200^\circ)$; (2) $\cos(-115^\circ)$; (3) $\operatorname{tg}(-55^\circ)$;

(4) $\operatorname{ctg}(-280^\circ)$; (5) $\sec(-72^\circ)$; (6) $\operatorname{cosec}(-183^\circ)$.

4. 求下列各三角函数的值:

(1) $\sin 900^\circ$; (2) $\sin 1290^\circ$; (3) $\cos 1035^\circ$;

(4) $\cos 1620^\circ$; (5) $\operatorname{tg} 2010^\circ$; (6) $\operatorname{ctg} 1755^\circ$.

§2·7 $180^\circ-\alpha$, $180^\circ+\alpha$, $360^\circ-\alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系

我们利用上一节的公式，把任何正角的三角函数化成小于 360° 的正角的三角函数后,求任何正角的三角函数值的问题还没有得到完全解决. 因为，三角函数表只载有 0° 到 90° 角的函数. 所以进一步我们还要研究，怎样把大于 90° 而小于 360° 角的三角函数,化成 0° 到 90° 角的三角函数.

显然 90° 与 180° 间的角总可以写成 $180^\circ-\alpha$ 的形式,其中 α 是某一个锐角，例如 130° 可以写成 $180^\circ-50^\circ$ 的形式,

166° 可以写成 $180°-14°$ 的形式等等．同样，180° 与 270° 间的角可以写成 $180°+\alpha$ 的形式，270° 与 360° 间的角可以写成 $360°-\alpha$ 的形式，这里 α 都表示某一个锐角．所以为了求出 90° 到 360° 间的角的三角函数，我们只要研究 $180°-\alpha$, $180°+\alpha$, $360°-\alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系就可以了．

1．$180°-\alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系 设 α 是一个锐角．在直角坐标系中作角 α 和 $180°-\alpha$，并且在它们的终边上分别取点 P 和点 P_1，使 $OP=OP_1=r$（图 2·22）．经过 P 和 P_1 分别作 x 轴的垂线 MP 和 M_1P_1．因为 OP_1 和 OP 对称于 y 轴，所以很容易得到直角三角形 $OP_1M_1\cong$ 直角三角形 OPM．因此，设点 P 的坐标是 (x, y)，那末，点 P_1 的坐标就是 $(-x, y)$．

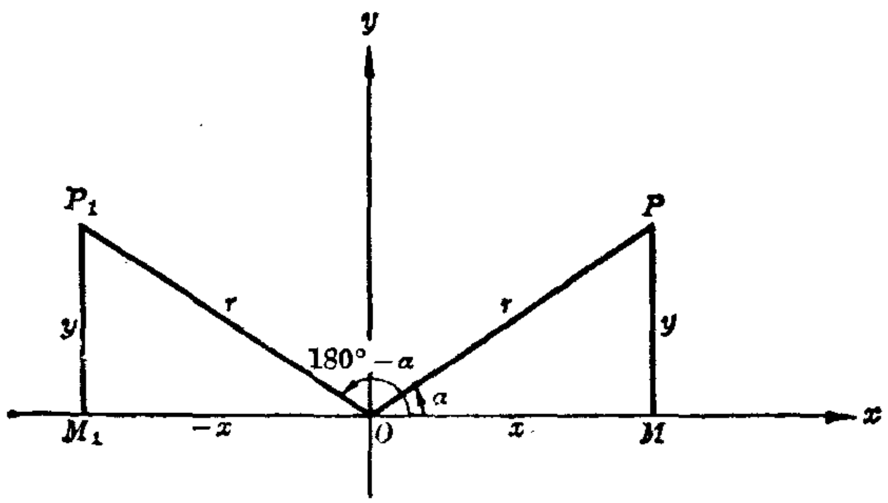


图 2·22

根据三角函数的定义，得

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\ \sin(180°-\alpha)=\frac{y}{r};$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\ \cos(180°-\alpha)=\frac{-x}{r}=-\frac{x}{r};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x},\quad \operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=\frac{y}{-x}=-\frac{y}{x};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y},\quad \operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)=\frac{-x}{y}=-\frac{x}{y};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x},\quad \sec(180^\circ-\alpha)=\frac{r}{-x}=-\frac{r}{x};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y},\quad \operatorname{cosec}(180^\circ-\alpha)=\frac{r}{y}.$$

所以

$$\boldsymbol{\sin(180^\circ-\alpha)=\sin\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\cos(180^\circ-\alpha)=-\cos\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\operatorname{tg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\operatorname{ctg}(180^\circ-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\sec(180^\circ-\alpha)=-\sec\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\operatorname{cosec}(180^\circ-\alpha)=\operatorname{cosec}\alpha.}$$

利用这一组公式，可以把 90° 与 180° 间的角的三角函数，化成锐角的三角函数.

例 1. 查表求 $\cos 145^\circ 24'$.

【解】 先算出 $145^\circ 24'=180^\circ-34^\circ 36'$. 于是

$$\begin{aligned}\cos 145^\circ 24'&=\cos(180^\circ-34^\circ 36')\\&=-\cos 34^\circ 36'=-0.8231.\end{aligned}$$

2. $180^\circ+\alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系 从图 2·23 可以看到，$180^\circ+\alpha$ 的终边和角 α 的终边成一直线. 因此，设 $OP_1=OP=r$，点 P 的坐标是 (x, y)，那末，点 P_1 的坐标就是 $(-x, -y)$.

根据三角函数的定义，得

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\quad \sin(180^\circ+\alpha)=\frac{-y}{r}=-\frac{y}{r};$$

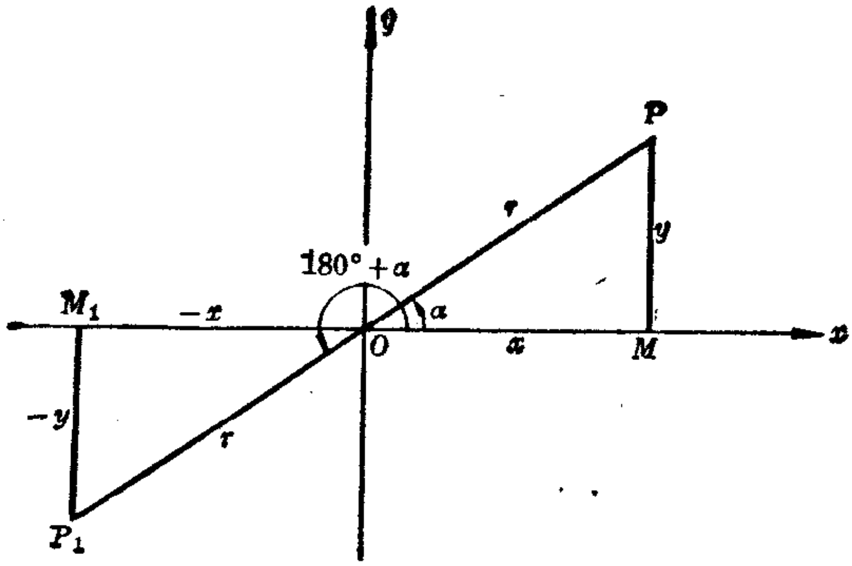


图 2·23

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\qquad \cos(180^\circ+\alpha)=\frac{-x}{r}=-\frac{x}{r};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x},\qquad \operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)=\frac{-y}{-x}=\frac{y}{x};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y},\qquad \operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)=\frac{-x}{-y}=\frac{x}{y};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x},\qquad \sec(180^\circ+\alpha)=\frac{r}{-x}=-\frac{r}{x};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y},\qquad \operatorname{cosec}(180^\circ+\alpha)=\frac{r}{-y}=-\frac{r}{y}.$$

所以

$$\boldsymbol{\sin(180^\circ+\alpha)=-\sin\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\cos(180^\circ+\alpha)=-\cos\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\operatorname{tg}(180^\circ+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\operatorname{ctg}(180^\circ+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\sec(180^\circ+\alpha)=-\sec\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\operatorname{cosec}(180^\circ+\alpha)=-\operatorname{cosec}\alpha.}$$

利用这组公式，可以把 180° 与 270° 间的角的三角函数，化成锐角的三角函数.

例 2. 查表求 $\operatorname{tg} 204°30'$.

【解】 先算出 $204°30' = 180° + 24°30'$. 于是

$$\operatorname{tg} 204°30' = \operatorname{tg}(180° + 24°30') = \operatorname{tg} 24°30' = 0.4557.$$

3. $360° - \alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系 从图 2·24 可以看到，如果在角 α 和 $360° - \alpha$ 的终边上分别取 OP 和 OP_1，使 $OP = OP_1 = r$，并且作 x 轴的垂线 MP 和 M_1P_1，那末，由于 OP_1 和 OP 对称于 x 轴，M_1 和 M 必定重合①. 因此，设点 P 的坐标是 (x, y)，那末，点 P_1 的坐标就是 $(x, -y)$. 用前面同样的方法，可以推得

$$\sin(360° - \alpha) = -\sin\alpha,$$
$$\cos(360° - \alpha) = \cos\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(360° - \alpha) = -\operatorname{tg}\alpha,$$

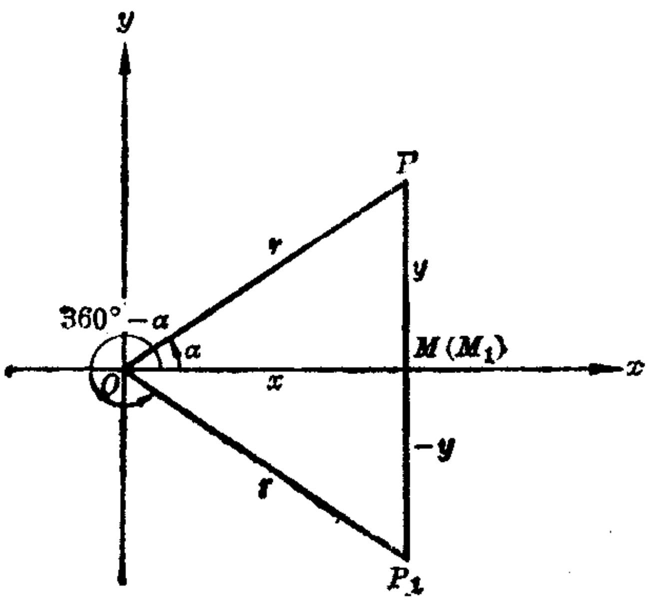


图 2·24

① 图中用记号 $M(M_1)$ 表示点 M 和 M_1 重合.

$$\operatorname{ctg}(360°-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\sec(360°-\alpha)=\sec\alpha,$$
$$\operatorname{cosec}(360°-\alpha)=-\operatorname{cosec}\alpha.$$

利用这组公式，可以把 270° 与 360° 间的角的三角函数，化成锐角的三角函数.

例 3. 查表求 $\sin 290°4'$.

【解】 先算出 $290°4'=360°-69°56'$. 于是

$$\sin 290°4'=\sin(360°-69°56')$$
$$=-\sin 69°56'=-0.9393.$$

利用 § 2·6 的公式，把大于 360° 的角的三角函数化成 0° 到 360° 间的角的三角函数后，如果得到的不是锐角的三角函数，那末，可以用本节的公式，把它们化成锐角的三角函数. 这样，我们已能够求任何正角的三角函数值了.

例 4. 查表求 $\operatorname{ctg} 1180°$.

【解】 $\operatorname{ctg} 1180°=\operatorname{ctg}(3\times 360°+100°)=\operatorname{ctg} 100°$
$=\operatorname{ctg}(180°-80°)=-\operatorname{ctg} 80°=-0.1763.$

习　题　2·7

1. 将下列各三角函数化成锐角的三角函数:

(1) $\sin 162°30'$;　(2) $\cos 102°$;　(3) $\operatorname{tg} 171°5'$;

(4) $\operatorname{ctg} 94°$;　(5) $\sec 501°$;　(6) $\operatorname{cosec} 490°$;

(7) $\sin 297°$;　(8) $\cos 580°$;　(9) $\operatorname{tg} 921°$;

(10) $\operatorname{ctg} 1000°$.

2. 将下列各三角函数化成小于 45° 的锐角的三角函数:

(1) $\cos 107°$;　(2) $\sin 232°32'$;　(3) $\sin 295°17'$;

(4) $\cos 711°$;　(5) $\operatorname{tg} 960°14'$;　(6) $\operatorname{ctg} 581°$;

(7) $\sec 1233°$;　(8) $\operatorname{cosec} 858°$;　(9) $\sin 892°$;

(10) $\cos 460°$.

3. 查表求下列各三角函数的值:

(1) $\sin 510°29'$; (2) $\cos 440°10'$;

(3) $\operatorname{tg} 1022°$; (4) $\operatorname{ctg} 851°40'$.

4. 设 A, B, C 是一个锐角三角形的三个内角,求证:

(1) $\sin(A+B)=\sin C$; (2) $\cos(B+C)=-\cos A$;

(3) $\operatorname{tg}(A+C)=-\operatorname{tg} B$.

5. 已知 $\sin(180°+\alpha)=-0.4$, 计算:

(1) $\sin(180°-\alpha)$; (2) $\sin(360°-\alpha)$; (3) $\cos(90°-\alpha)$.

6. 求下列各式的值:

(1) $3\cos 240°-2\operatorname{tg} 240°$;

(2) $8\sin 390°\cos 300°\operatorname{tg} 240°\operatorname{ctg} 210°$;

(3) $2\sin 765°+\operatorname{tg}^2 1485°\operatorname{ctg} 135°$;

(4) $\dfrac{2\cos 660°+\sin 630°}{3\cos 1020°+2\cos 660°}$.

§2·8 $-\alpha$ 与任意角 α 的三角函数间的关系

我们已经解决了求任意正角的三角函数值的问题. 剩下来的问题是:怎样求负角的三角函数值?

在这一节中,我们要对于任意角 α, 推出 $-\alpha$ 与 α 的三角函数间的关系,然后应用所得的公式,化负角的三角函数为正角的三角函数.

我们知道,不论 α 是正角还是负角, $-\alpha$ 和 α 是射线按两个相反方向旋转同样的角度所产生的. 因此, 当 α 和 $-\alpha$ 有公共顶点并且取它们的公共始边为 x 轴的正方向时, 它们的终边一定对称于 x 轴,如图 2·25 中所画的.

在 α 的终边和 $-\alpha$ 的终边上分别取点 P 和 P_1, 使 $OP=OP_1=r$. 经过 P 和 P_1 作 x 轴的垂线 MP 和 M_1P_1. 那末,

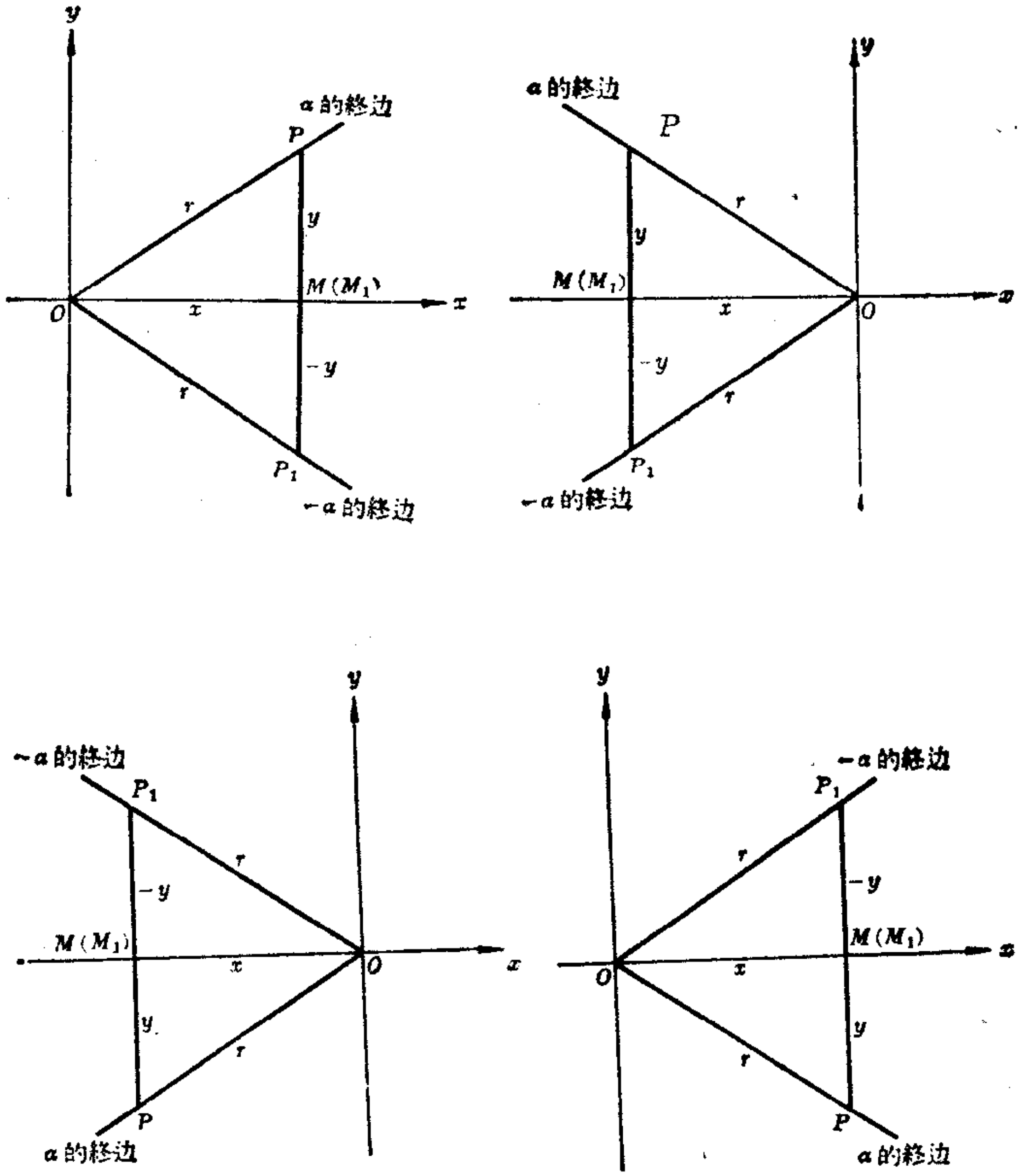


图 2·25

M 和 M_1 必定重合. 因此,设点 P 的坐标是 (x, y), 点 P_1 的坐标就是$(x, -y)$.

根据三角函数的定义,得

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\quad \sin(-\alpha)=\frac{-y}{r}=-\frac{y}{r};$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \cos(-\alpha)=\frac{x}{r};$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x},\quad \operatorname{tg}(-\alpha)=\frac{-y}{x}=-\frac{y}{x};$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y},\quad \operatorname{ctg}(-\alpha)=\frac{x}{-y}=-\frac{x}{y};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x},\quad \sec(-\alpha)=\frac{r}{x};$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y},\quad \operatorname{cosec}(-\alpha)=\frac{r}{-y}=-\frac{r}{y}.$$

所以

$$\boldsymbol{\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\cos(-\alpha)=\cos\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\sec(-\alpha)=\sec\alpha,}$$
$$\boldsymbol{\operatorname{cosec}(-\alpha)=-\operatorname{cosec}\alpha.}$$

例 查表求 $\operatorname{ctg}(-1596^\circ)$.

【解】 (1) 先化成正角的三角函数，得

$$\operatorname{ctg}(-1596^\circ)=-\operatorname{ctg}1596^\circ.$$

(2) 其次，化成小于 360° 的正角的三角函数，得

$$-\operatorname{ctg}1596^\circ=-\operatorname{ctg}(4\times360^\circ+156^\circ)=-\operatorname{ctg}156^\circ.$$

(3) 再化成锐角的三角函数，得

$$-\operatorname{ctg}156^\circ=-\operatorname{ctg}(180^\circ-24^\circ)$$
$$=-(-\operatorname{ctg}24^\circ)=\operatorname{ctg}24.$$

(4) 查表得

$$\operatorname{ctg}24^\circ=2.246.$$

$$\therefore\quad \operatorname{ctg}(-1596^\circ)=2.246.$$

在§2·7, §2·8和本节中，我们得到了五组公式. 这些公式可以列成下表:

角＼函数	正弦	余弦	正切	余切	正割	余割
$n\cdot 360°+\alpha$	$\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sec\alpha$	$\mathrm{cosec}\,\alpha$
$180°-\alpha$	$\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\sec\alpha$	$\mathrm{cosec}\,\alpha$
$180°+\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\sec\alpha$	$-\mathrm{cosec}\,\alpha$
$360°-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sec\alpha$	$-\mathrm{cosec}\,\alpha$
$-\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\sec\alpha$	$-\mathrm{cosec}\,\alpha$

为了便于记忆，从这张表可以归纳出下面这句话:

$n\cdot 360°+\alpha$, $180°\pm\alpha$, $360°-\alpha$, $-\alpha$ 的三角函数，等于角 α 的同函数的值，放上 α 是锐角时，原来的函数在相应象限内的符号.

习 题 2·8

1. 求下列各式的值:

(1) $\sin 420°\cos 390°+\cos(-300°)\sin(-330°)$;

(2) $\mathrm{tg}(-840°)\sec(-900°)+\sin(-405°)\mathrm{ctg}(-510°)$;

(3) $\sin^2(-990°)+\mathrm{cosec}^2(-300°)$.

2. 化简 $\dfrac{(a^2-b^2)\mathrm{ctg}(180°-x)}{\cos(180°+x)}+\dfrac{(a^2+b^2)\mathrm{tg}(90°-x)}{\mathrm{ctg}(180°-x)}$.

3. 化简 $\dfrac{\sin(-A)}{\sin(A-180°)}-\dfrac{\mathrm{tg}(A-90°)}{\mathrm{ctg}(A-360°)}+\dfrac{\cos(-A-180°)}{\sin(A-90°)}$.

4. 查表求下列各三角函数的值:

(1) $\sin(-837°)$; (2) $\cos(-791°)$; (3) $\mathrm{ctg}(-1112°31')$.

5. 设 $\alpha=-240°$, 验证下列等式:

(1) $\mathrm{tg}\,2\alpha=\dfrac{2\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}$; (2) $2\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha$;

(3) $\mathrm{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$.

6. 求证 $\cos\beta+\sqrt{3}\sin\beta$

$$=2[\sin(-210^\circ)\cos(-\beta)+\cos(-210^\circ)\sin(-\beta)].$$

7. 如果 $-360^\circ<\alpha<0^\circ$，求适合下列等式的 α:

(1) $\sin\alpha=-\frac{1}{2}$； (2) $\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}$； (3) $\sec(-\alpha)=\sqrt{2}$.

§2·9 已知一个三角函数的值，求角

我们已经能够求任意的正角或者负角的三角函数值．现在研究相反的问题：怎样求得具有已知三角函数值的一切角．

1．已知的三角函数值是正数

例 1． 已知 $\sin x=0.2385$，求 x.

【解】 因为已知 $\sin x$ 的值是正的，所以 x 的终边在第一象限或者第二象限内．

先求正弦等于 0.2385 的 0° 到 360° 的角．

查表得 $\sin 13^\circ48'=0.2385$.

所以第一个角是 $x_1=13^\circ48'$.

因为 $\sin(180^\circ-13^\circ48')=\sin 13^\circ48'=0.2385$，所以第二个角是 $x_2=180^\circ-13^\circ48'=166^\circ12'$.

要写出和这两个角终边相同的一切角，只要每一个都加上 $n\cdot360^\circ$（n 是整数）．因此，正弦等于 0.2385 的一切角是

$$x=n\cdot360^\circ+13^\circ48',$$

$$x=n\cdot360^\circ+166^\circ12'.$$

例 2． 已知 $\cos x=\frac{2}{3}$，求 x.

【解】 因为已知 $\cos x$ 的值是正的，所以 x 的终边在第一

或者第四象限内.

先求余弦等于 $\frac{2}{3}$ 的 $0°$ 到 $360°$ 的角.

查表得 $\cos 48°11'=0.6667=\frac{2}{3}$.

所以第一个角是 $x_1=48°11'$.

因为 $\cos(360°-48°11')=\cos 48°11'=\frac{2}{3}$, 所以第二个角是 $x_2=360°-48°11'=311°49'$.

因此, 余弦等于 $\frac{2}{3}$ 的一切角是

$$x=n\cdot 360°+48°11',$$

$$x=n\cdot 360°+311°49'.$$

例 3. 已知 $\operatorname{tg} x=2$, 求x.

【解】 因为已知 $\operatorname{tg} x$ 的值是正的, 所以 x 的终边在第一象限或者第三象限内.

先求正切等于 2 的 $0°$ 到 $360°$ 的角.

查表得 $\operatorname{tg} 63°26'=2$.

所以第一个角是 $x_1=63°26'$.

因为 $\operatorname{tg}(180°+63°26')=\operatorname{tg} 63°26'=2$, 所以第二个角是 $x_2=180°+63°26'=243°26'$.

因此, 正切等于 2 的一切角是

$$x=n\cdot 360°+63°26',$$

$$x=n\cdot 360°+243°26'.$$

2. 已知的三角函数值是负数

例 4. 已知 $\sin x=-0.6372$, 求 x.

【解】 因为已知 $\sin x$ 的值是负的, 所以 x 的终边在第三

象限或者第四象限内.

先求正弦等于 -0.6372 的 $0°$ 到 $360°$ 的角.

查表得 $\sin 39°35' = +0.6372$.

因为 $\sin(180° + 39°35') = -\sin 39°35' = -0.6372$, 所以第一个角是 $x_1 = 180° + 39°35' = 219°35'$.

又因为 $\sin(360° - 39°35') = -\sin 39°35' = -0.6372$, 所以第二个角是 $x_2 = 360° - 39°35' = 320°25'$.

因此适合于 $\sin x = -0.6372$ 的一切角是

$$x = n \cdot 360° + 219°35',$$

$$x = n \cdot 360° + 320°25'.$$

例 5. 已知 $\operatorname{ctg} x = -\frac{5}{3}$, 求 x.

【解】 因为已知 $\operatorname{ctg} x$ 的值是负的, 所以 x 的终边在第二象限或者第四象限内.

先求余切等于 $-\frac{5}{3}$ 的 $0°$ 到 $360°$ 的角.

查表得 $\operatorname{ctg} 30°58' = 1.6667 = \frac{5}{3}$.

因为 $\operatorname{ctg}(180° - 30°58') = -\operatorname{ctg} 30°58' = -\frac{5}{3}$, 所以第一个角是 $x_1 = 180° - 30°58' = 149°2'$.

又因为 $\operatorname{ctg}(360° - 30°58') = -\operatorname{ctg} 30°58' = -\frac{5}{3}$, 所以第二个角是 $x_2 = 360° - 30°58' = 329°2'$.

因此, 适合于 $\operatorname{ctg} x = -\frac{5}{3}$ 的一切角是

$$x = n \cdot 360° + 149°2',$$

$$x = n \cdot 360° + 329°2'.$$

习 题 2·9

1. 求适合下列各等式的角 x 的一切值:

(1) $\cos x=0$;　　(2) $\sin x=\sin 33°50'$;

(3) $\operatorname{tg} x=-1$;　　(4) $\operatorname{ctg} x=\operatorname{tg}54°15'$.

2. 查表求适合下列各等式中的角 x 的一切值:

(1) $\sin x=-0.1532$;　　(2) $\cos x=-0.8342$;

(3) $\operatorname{tg} x=-\sin 82°35'$;　　(4) $\operatorname{ctg} x=-\cos 201°43'$.

3. 将下列各式化成锐角 α 的函数:

(1) $\sin(900°+\alpha)$;　　(2) $\sin(1080°-\alpha)$;

(3) $\cos(990°-\alpha)$;　　(4) $\operatorname{tg}(1620°+\alpha)$;

(5) $\operatorname{ctg}(1800°-\alpha)$;　　(6) $\sec(\alpha-810°)$.

*4. 查表求下列各式中的角 x 的一切值:

(1) $\sin 2x=0.8351$;

(2) $\sin x=\sin(180°+x)-\sin 771°10'$;

(3) $\operatorname{tg} x=|2\sin 492°+\cos 850°|$;

(4) $|\operatorname{ctg} x|=1.1255$.

§2·10 $90°+\alpha, 270°-\alpha, 270°+\alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系

在 §2·7 中，我们曾推出，当 α 是锐角时，$180°-\alpha$, $180°+\alpha$ 和 $360°-\alpha$ 与角 α 的三角函数间的关系，得到了三组公式. 利用这些公式，可以把 $90°$ 到 $360°$ 间的角的三角函数化成锐角的三角函数.

利用这三组公式，我们还可以推出 $90°+\alpha$, $270°-\alpha$, $270°+\alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系.

1　$90°+\alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系　我们把 $90°$ 写成 $180°-90°$, 得

$$\sin(90^\circ+\alpha)=\sin(180^\circ-90^\circ+\alpha)$$
$$=\sin[180^\circ-(90^\circ-\alpha)].$$

已知的公式 $\sin(180^\circ-\theta)=\sin\theta$ 对于任意的锐角都是正确的. 我们知道，当 α 是锐角时，$90^\circ-\alpha$ 也是锐角. 因此，

$$\sin[180^\circ-(90^\circ-\alpha)]=\sin(90^\circ-\alpha).$$

但从 §1·3 知道

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\cos\alpha.$$

由此可知，

$$\mathbf{\sin(90^\circ+\alpha)=\cos\alpha.}$$

同样，

$$\cos(90^\circ+\alpha)=\cos(180^\circ-90^\circ+\alpha)$$
$$=\cos[180^\circ-(90^\circ-\alpha)]$$
$$=-\cos(90^\circ-\alpha)=-\sin\alpha.$$

这就是说，
$$\mathbf{\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha.}$$

$90^\circ+\alpha$ 的其他四个三角函数，都可以仿照上面的方法化成锐角 α 的三角函数. 我们有

$$\mathbf{tg(90^\circ+\alpha)=-ctg\,\alpha,}$$
$$\mathbf{ctg(90^\circ+\alpha)=-tg\,\alpha,}$$
$$\mathbf{sec(90^\circ+\alpha)=-cosec\,\alpha,}$$
$$\mathbf{cosec(90^\circ+\alpha)=sec\,\alpha.}$$

2. $270^\circ-\alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系 我们可以把 270° 写成 $180^\circ+90^\circ$，然后仿照上面的方法，推得

$$\sin(270^\circ-\alpha)=\sin(180^\circ+90^\circ-\alpha)$$
$$=\sin[180^\circ+(90^\circ-\alpha)]$$
$$=-\sin(90^\circ-\alpha)=-\cos\alpha.$$

就是
$$\mathbf{\sin(270^\circ-\alpha)=-\cos\alpha.}$$

同样可以推得 $270°-\alpha$ 的其他三角函数与锐角 α 的三角函数间的关系

$$\cos(270°-\alpha)=-\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(270°-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(270°-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\sec(270°-\alpha)=-\operatorname{cosec}\alpha,$$
$$\operatorname{cosec}(270°-\alpha)=-\sec\alpha.$$

3. $270°+\alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系 我们可以把 $270°+\alpha$ 写成 $360°-(90°-\alpha)$，并且应用 $360°-\theta$ 与锐角 θ 的三角函数间的关系和 §1·3 的公式，推得 $270°+\alpha$ 和锐角 α 的三角函数间有下面的关系：

$$\sin(270°+\alpha)=-\cos\alpha,$$
$$\cos(270°+\alpha)=\sin\alpha,$$
$$\operatorname{tg}(270°+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha,$$
$$\operatorname{ctg}(270°+\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha,$$
$$\sec(270°+\alpha)=\operatorname{cosec}\alpha,$$
$$\operatorname{cosec}(270°+\alpha)=-\sec\alpha.$$

例 把 $\cos 235°$ 化成锐角的正弦.

【解】 $\cos 235°=\cos(270°-35°)=-\sin 35°.$

我们知道，要把 $\cos 235°$ 化成锐角的三角函数，可以利用 $180°+\alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系. 从这个例子可以看到，利用 $270°-\alpha$ 与锐角 α 的三角函数间的关系也可以达到目的. 但本题要求化得的锐角的三角函数是原来函数的余函数，我们就不能用关于 $180°+\alpha$ 的公式. 如果用 $180°+\alpha$ 的公式，所得的锐角的函数，将仍是原来函数的名称.

本节所讲的三组公式，和 §1·3 中互为余角的三角函数间的关系公式很相象. 现在把它们一起列成下表：

角 \ 函数	正　弦	余　弦	正　切	余　切	正　割	余　割
$90°-\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$
$90°+\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$\sec\alpha$
$270°-\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\operatorname{ctg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$
$270°+\alpha$	$-\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\operatorname{ctg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cosec}\alpha$	$-\sec\alpha$

为了便于记忆，从这张表可以归纳出下面这句话：

$90°\pm\alpha$，$270°\pm\alpha$ 的三角函数值，等于角 α 的相应的余函数的值，放上 α 是锐角时，原来的函数在相应象限内的符号。

习　题　2·10

1．将下列各三角函数化成小于 $45°$ 的正锐角的三角函数：

(1) $\sin 317°$；　(2) $\operatorname{ctg} 659°$；　(3) $\sin 289°16'$；

(4) $\cos 333°$；　(5) $\operatorname{tg} 700°$；　(6) $\sin(-400°)$；

(7) $\operatorname{tg}(-842°)$；　(8) $\sec(-700°)$；　(9) $\cos 1000°$；

(10) $\operatorname{ctg}(-1090°)$。

2．已知 $\sin(180°+\alpha)=-\dfrac{1}{2}$，计算：

(1) $\cos(270°+\alpha)$；　(2) $\sin(180°-\alpha)$；　(3) $\cos(90°+\alpha)$。

3．化简下列各式：

(1) $\sin(450°-\alpha)-\sin(270°-\alpha)+\sin(\alpha-450°)+\sin(270°+\alpha)$；

(2) $\operatorname{tg}(\alpha-360°)-2\sin(180°+\alpha)\sin(90°+\alpha)+\operatorname{ctg}(270°+\alpha)$；

(3) $\sin(\alpha-180°)+\operatorname{tg}(\alpha-180°)-\cos(90°+\alpha)$。

4．分别求 $\sin(90°+210°)$ 和 $\cos 210°$ 的值，验证下列等式成立：

$$\sin(90°+210°)=\cos 210°.$$

5．求证 $\cos(-999°)\sin 99°+\sin(-171°)\sin(-261°)$

$$-\operatorname{ctg} 1089°\operatorname{ctg}(-630°)=0.$$

6．已知 $\sin 18°=\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$，求：

(1) $\sin 198°$；　(2) $\cos 252°$；　(3) $\cos 1008°$。

§2·11 诱导公式的一般性

在§2·8的表中列出的是$n\cdot360°+\alpha$, $180°-\alpha$, $180°+\alpha$, $360°-\alpha$和$-\alpha$的三角函数与α的三角函数间的关系. §2·10的表中列出的是$90°-\alpha$, $90°+\alpha$, $270°-\alpha$和$270°+\alpha$的三角函数与α的三角函数间的关系. 表示这些关系的公式一共有九组,每组六个公式. 它们都叫做**诱导公式**. 在这九组公式中,我们以前已经指出,关于$n\cdot360°+\alpha$和$-\alpha$的两组公式对于任意角α都是正确的. 而其他的七组公式(就是关于$180°-\alpha$, $180°+\alpha$, $360°-\alpha$, $90°-\alpha$, $90°+\alpha$, $270°-\alpha$, $270°+\alpha$的公式),仅在α是锐角的条件下证明了它们的正确性. 其实,这七组公式和另外两组一样,对于任意角α也都是正确的. 为了将来应用起来不受α是锐角的限制,我们来证明它们的一般性.

(1) 关于$90°+\alpha$公式的一般性: 在图2·26中,我们看到,不论α是什么值,如果射线从角α的终边起,按反时针方向旋转$90°$,就可以转成$90°+\alpha$的角. 在角α的终边上取一点P, $90°+\alpha$的终边上取一点P_1,并且使$OP_1=OP=r$. 过P和P_1分别作MP和M_1P_1垂直于x轴. 这样所组成的直角三角形OP_1M_1和OPM显然是全等的. 因此,它们对应的直角边的长相等.

设点P的坐标是(x, y). 在每一张图中,按绝对值和符号仔细比较一下点P_1和点P的坐标,就可以发现,点P_1的坐标总是$(-y, x)$. 换句话说,点P_1的横坐标按绝对值来说,等于点P的纵坐标,但符号相反;点P_1的纵坐标无论按绝对值和符号来说,都和点P的横坐标相同.

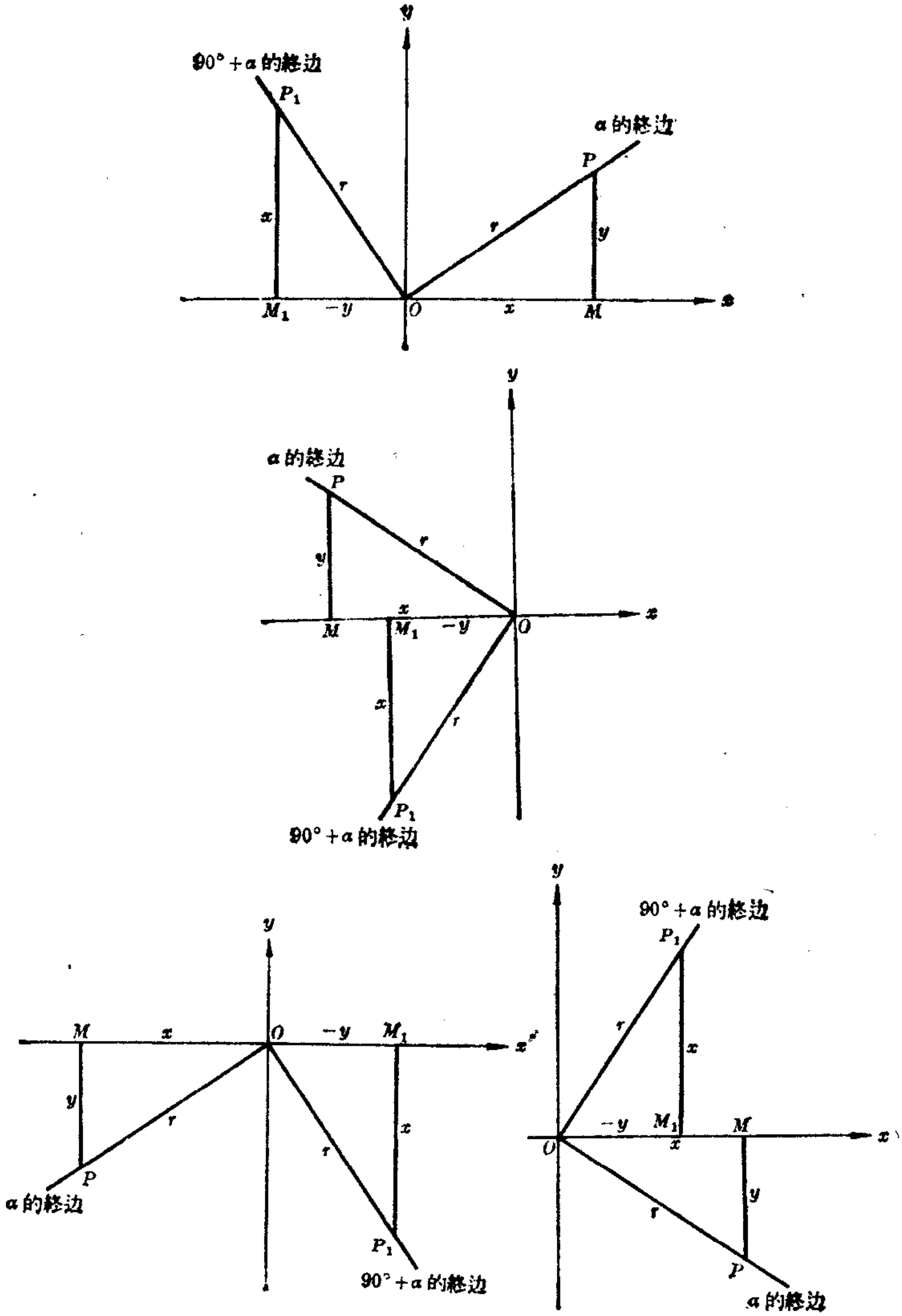


图 2·26

因此，对于 α 的任何值，都有

$$\sin(90^\circ+\alpha)=\frac{x}{r}=\cos\alpha,$$

$$\cos(90^\circ+\alpha)=\frac{-y}{r}=-\sin\alpha,$$

等等．这就证明了关于 $90^\circ+\alpha$ 公式的一般性．

(2) 关于 $90^\circ-\alpha$ 公式的一般性：关于 $-\alpha$ 和 $90^\circ+\alpha$ 的公式既然已经证明它们的一般性，我们就可以利用它们，推得对于 α 的任何值，

$$\sin(90^\circ-\alpha)=\sin[90^\circ+(-\alpha)]=\cos(-\alpha)=\cos\alpha,$$

$$\begin{aligned}\cos(90^\circ-\alpha)&=\cos[90^\circ+(-\alpha)]=-\sin(-\alpha)\\&=-(-\sin\alpha)=\sin\alpha,\end{aligned}$$

等等．这就证明了关于 $90^\circ-\alpha$ 公式的一般性．

(3) 关于 $180^\circ+\alpha$ 公式的一般性：利用关于 $90^\circ+\alpha$ 公式的一般性，我们也可以推得对于 α 的任何值，

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ+\alpha)&=\sin[90^\circ+(90^\circ+\alpha)]\\&=\cos(90^\circ+\alpha)=-\sin\alpha,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(180^\circ+\alpha)&=\cos[90^\circ+(90^\circ+\alpha)]\\&=-\sin(90^\circ+\alpha)=-\cos\alpha,\end{aligned}$$

等等．这就证明了关于 $180^\circ+\alpha$ 公式的一般性．

(4) 关于 $180^\circ-\alpha$ 公式的一般性：利用关于 $180^\circ+\alpha$ 公式的一般性和关于 $-\alpha$ 公式的一般性，我们又可以推得对于 α 的任何值，

$$\begin{aligned}\sin(180^\circ-\alpha)&=\sin[180^\circ+(-\alpha)]=-\sin(-\alpha)\\&=-(-\sin\alpha)=\sin\alpha,\end{aligned}$$

$$\cos(180^\circ-\alpha)=\cos[180^\circ+(-\alpha)]=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha,$$

等等．这就证明了关于 $180^\circ-\alpha$ 公式的一般性．

(5) 关于 $270°+\alpha$ 公式的一般性：利用关于 $180°+\alpha$ 公式的一般性和关于 $90°+\alpha$ 公式的一般性，我们可以推得对于 α 的任何值，

$$\begin{aligned}\sin(270°+\alpha)&=\sin[180°+(90°+\alpha)]\\&=-\sin(90°+\alpha)=-\cos\alpha,\\ \cos(270°+\alpha)&=\cos[180°+(90°+\alpha)]\\&=-\cos(90°+\alpha)\\&=-(-\sin\alpha)=\sin\alpha,\end{aligned}$$

等等. 这就证明了关于 $270°+\alpha$ 公式的一般性.

(6) 关于 $270°-\alpha$ 公式的一般性：利用关于 $270°+\alpha$ 公式的一般性和关于 $-\alpha$ 公式的一般性，我们可以推得对于 α 的任何值，

$$\begin{aligned}\sin(270°-\alpha)&=\sin[270°+(-\alpha)]\\&=-\cos(-\alpha)=-\cos\alpha,\\ \cos(270°-\alpha)&=\cos[270°+(-\alpha)]\\&=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\end{aligned}$$

等等. 这就证明了关于 $270°-\alpha$ 公式的一般性.

(7) 关于 $360°-\alpha$ 公式的一般性：因为关于 $n\cdot360°+\alpha$ 公式和关于 $-\alpha$ 公式都具有一般性，所以对于 α 的任何值，

$$\begin{aligned}\sin(360°-\alpha)&=\sin[360°+(-\alpha)]\\&=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha,\\ \cos(360°-\alpha)&=\cos[360°+(-\alpha)]\\&=\cos(-\alpha)=\cos\alpha,\end{aligned}$$

等等. 这就证明了关于 $360°-\alpha$ 公式的一般性.

这样，我们已证明了九组诱导公式都具有一般性.

这九组公式可以分为两类：第一类是关于 $90°$ 的偶数倍加上或者减去 α 的公式. 属于这一类的是关于

$$n\cdot 360°+\alpha,\ 180°-\alpha,\ 180°+\alpha,\ 360°-\alpha,\ -\alpha$$

的五组公式. 第二类是关于 $90°$ 的奇数倍加上或者减去 α 的公式. 属于这一类的是关于

$$90°-\alpha,\ 90°+\alpha,\ 270°-\alpha,\ 270°+\alpha$$

的四组公式.

这两类公式已经分别总起来列在 §2.8 和 §2.10 的表中. 从表里可以看到, 第一类公式中与 α 相关的角的函数一定化成 α 的同名函数; 第二类公式中与 α 相关的角的函数一定化成 α 的余函数.

正因为这些公式具有一般性,所以为了帮助记忆,我们仍只要把 α 看成锐角. 这样就容易确定化得的 α 的三角函数前面应当放上什么符号.

例如, $180°+\alpha$ 属于第一类; $\sin(180°+\alpha)$ 一定是用 $\sin\alpha$ 来表示的. 当 α 是锐角时, $180°+\alpha$ 的终边在第三象限里, $\sin(180°+\alpha)$ 的值是负的. 但锐角 α 的正弦的值是正的. 因此,我们就可以确定,在 $\sin\alpha$ 的前面应当放上负号

$$\sin(180°+\alpha)=-\sin\alpha.$$

又如, $270°+\alpha$ 属于第二类; $\cos(270°+\alpha)$ 一定要用 $\sin\alpha$ 来表示. 当 α 是锐角时, $270°+\alpha$ 的终边在第四象限里, $\cos(270°+\alpha)$ 的值是正的. 而当 α 是锐角时, $\sin\alpha$ 的值也是正的. 因此,我们就可以确定

$$\cos(270°+\alpha)=\sin\alpha.$$

习 题 2·11

1. A, B, C, D 顺次为圆内接四边形的四个内角,求证:

(1) $\sin A=\sin C$;　　(2) $\cos(A+B)=\cos(C+D)$;

(3) $\operatorname{tg}(A+B+C)=-\operatorname{tg} D$;　　(4) $\sec\frac{A}{2}=\operatorname{cosec}\frac{C}{2}$;

(5) $\sin\left(\frac{A}{2}+B\right)=-\cos\left(\frac{C}{2}+D\right)$.

2．化下列各三角函数为钝角的三角函数：

(1) $\sin 800°$;　　(2) $\cos 17°20'$;

(3) $\operatorname{tg} 1017°$;　　(4) $\cos 395°$;

(5) $\operatorname{ctg}(-7°)$;　　(6) $\sin 470°$;

(7) $\sec(-880°)$;　　(8) $\operatorname{tg} 801°$;

(9) $\operatorname{cosec}(-1000°)$;　　(10) $\cos 37°$.

[例如：$\sin 257°=\sin(90°+167°)=\cos 167°$.]

*3．求证 $\sin(n\cdot 180°+\alpha)=(-1)^n\sin\alpha$（$n$ 为整数）.

4．把 $\sin 1000°$ 化成：(1) 小于 $45°$ 角的三角函数；(2) 大于 $45°$ 的锐角的三角函数；(3) 钝角的三角函数；(4) $180°$ 到 $270°$ 之间的角的三角函数；(5) $270°$ 到 $360°$ 之间的角的三角函数.

§2·12　同角的三角函数间的关系

我们已经学会根据某一个三角函数的已知值，求出和这个三角函数值对应的角度．当这些角度求出来以后，我们也就能够求出这些角的其他三角函数的值．但是不是可以不求出对应的角度，直接求出它们的其他三角函数的值呢？这个问题在研究了同角的三角函数间的关系以后，就可以得到完满的解决．

同角的三角函数间的关系，最常用的有下面三类：

1．倒数关系　根据任意角的三角函数的定义，可以知道

$$\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\frac{y}{r}}=\frac{r}{y}=\operatorname{cosec}\alpha;$$

$$\frac{1}{\cos\alpha}=\frac{1}{\frac{x}{r}}=\frac{r}{x}=\sec\alpha;$$

$$\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\frac{y}{x}}=\frac{x}{y}=\operatorname{ctg}\alpha.$$

就是

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}; \tag{1}$$

$$\sec\alpha=\frac{1}{\cos\alpha}; \tag{2}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}. \tag{3}$$

2．商数关系 根据任意角的三角函数的定义，可以知道

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}}=\frac{y}{x}=\operatorname{tg}\alpha,$$

就是

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}. \tag{4}$$

从等式(3)和(4)，又可以得到

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha},$$

就是

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{5}$$

3．平方关系 因为

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\left(\frac{y}{r}\right)^2+\left(\frac{x}{r}\right)^2=\frac{y^2+x^2}{r^2},$$

而

$$y^2+x^2=r^2,$$

所以

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=\frac{r^2}{r^2}=1,$$

就是

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1. \tag{6}$$

把等式(6)的两边都除以 $\cos^2\alpha$，得

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha}+1=\frac{1}{\cos^2\alpha},$$

就是

$$\left(\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)^2+1=\left(\frac{1}{\cos\alpha}\right)^2.$$

因此，

$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha. \tag{7}$$

把等式(6)的两边都除以 $\sin^2\alpha$，得

$$1+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha}=\frac{1}{\sin^2\alpha},$$

就是

$$1+\left(\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\right)^2=\left(\frac{1}{\sin\alpha}\right)^2.$$

因此，

$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha. \tag{8}$$

以上(1)到(8)这八个等式中，(1)，(2)，(3)，(4)，(6)可以看做是基本的；(5)，(7)，(8)可以从它们推导出来.

这些等式，对于使它们的任何一边失去意义的那些角当然不成立. 例如，当 $\alpha=90°$ 时，$\operatorname{tg}\alpha$ 不存在. 所以对于 $\alpha=90°$ 来说，等式(3)，(4)和(7)都不成立. 但是对于使等式的两边都具有意义的那些角来说，不论角的终边在哪一象限内，等式都成立. 所以它们都是恒等式.

例 1. 已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，求 $\sin\alpha$.

【解】 根据恒等式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，得 $\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$. 因为已知的 $\cos\alpha$ 的值是正的，所以 α 的终边在第一象限或者第四象限内.

对于终边在第一象限内的角 α 来说，$\sin\alpha$ 的值是正的．因此，

$$\sin\alpha=+\sqrt{1-\cos^2\alpha}=+\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=\frac{4}{5}.$$

对于终边在第四象限内的角 α 来说，$\sin\alpha$ 的值是负的．因此，

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}.$$

例 2．已知 $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{15}{8}$，$90°<\alpha<180°$，求 α 的其他三角函数的值．

【解】 $$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1}{-\frac{15}{8}}=-\frac{8}{15}.$$

$$\sec\alpha=-\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}=-\sqrt{1+\left(-\frac{15}{8}\right)^2}$$

$$=-\sqrt{1+\frac{225}{64}}=-\frac{17}{8}.$$

根据恒等式 $1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$，得 $\sec\alpha=\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}$．这里，我们在根号前取负号，因为已知 α 的终边在第二象限内，它的正割的值是负的．

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{1}{-\frac{17}{8}}=-\frac{8}{17}.$$

又从恒等式 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$，得

$$\sin\alpha=\cos\alpha\cdot\operatorname{tg}\alpha=\left(-\frac{8}{17}\right)\left(-\frac{15}{8}\right)=\frac{15}{17}.$$

$$\operatorname{cosec}\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}=\frac{1}{\frac{15}{17}}=\frac{17}{15}.$$

在例2中，我们看到，已知一个三角函数的值，可以求得其他五个三角函数的值．解题的步骤是：先利用倒数关系求出一个三角函数的值；其次利用平方关系和倒数关系再求出两个三角函数的值；最后利用商数关系和倒数关系求出剩下的两个三角函数的值．这样的步骤是比较合理的．

例3．已知α的终边在第四象限内，用$\operatorname{tg}\alpha$来表示$\sin\alpha$.

【解】 这个例题就是要寻求一个公式，用它来根据已知的$\operatorname{tg}\alpha$的值，算出$\sin\alpha$的值．我们这样进行：

$$\sec\alpha=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}.$$

这里，因为α的终边在第四象限内，所以$\sec\alpha$的值是正的，根号前应取正号．

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sec\alpha}=\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

所以 $$\sin\alpha=\cos\alpha\operatorname{tg}\alpha=\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\alpha}}.$$

下面再举例说明，怎样利用同角的三角函数间的关系，来化简含有三角函数的式子，或者证明三角恒等式．

例4．化简

$$\cos\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha\cdot\sqrt{\sec^2\alpha-1}\ (270^\circ<\alpha<360^\circ).$$

【解】 原式$=\cos\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha\cdot\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha}$.

注意$\operatorname{tg}^2\alpha$的两个平方根是$\operatorname{tg}\alpha$和$-\operatorname{tg}\alpha$．由于$\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha}$表示正的平方根，而且在所设的条件下，$\operatorname{tg}\alpha$的值是负的，而$-\operatorname{tg}\alpha$的值是正的，所以$\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha$．因此，

$$原式=\cos\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha(-\operatorname{tg}\alpha)$$
$$=\cos\alpha\cdot\frac{1}{\sin\alpha}\left(-\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\right)=-1.$$

例 5. 证明恒等式

$$\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha=\sec^2\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha.$$

【证】 $\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

$$=\frac{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}=\frac{1}{\cos^2\alpha\sin^2\alpha}=\sec^2\alpha\cdot\operatorname{cosec}^2\alpha.$$

例 6. 证明恒等式

$$\operatorname{ctg}\alpha+\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha.$$

【证】 $\operatorname{ctg}\alpha+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}+\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$

$$=\frac{\cos\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}=\frac{\cos\alpha+1}{\sin\alpha(1+\cos\alpha)}$$
$$=\frac{1}{\sin\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha.$$

在例 5 和例 6 中，我们用正弦和余弦来表示等式左边的其他三角函数．这是最常用的方法．但有时我们也用更简单的方法进行变形．

例 7. 证明恒等式

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta.$$

【证】 $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{tg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\dfrac{1}{\operatorname{ctg}\beta}-\dfrac{1}{\operatorname{tg}\alpha}}$

$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\beta}{\operatorname{ctg}\beta\cdot\operatorname{tg}\alpha}}=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\beta.$$

在这个例题中，恒等式的两边只有两个角的正切和余切，用正弦和余弦来表示它们，就不见得妥当了．我们注意到 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{ctg}\beta$ 在右边出现，所以在左边就让它们保留不动；而 $\operatorname{tg}\beta$ 和 $\operatorname{ctg}\alpha$ 在右边不出现，我们就分别用 $\operatorname{ctg}\beta$ 和 $\operatorname{tg}\alpha$ 的倒数来代替它们．

化简含有三角函数的式子和证明三角恒等式，在解决实际问题中很有用处．但我们不可能提出一套到处都适用的法则．只有多做些练习，才能够逐步养成熟练的技巧．

习　题　2·12

1．已知 $\sin\alpha=-\dfrac{24}{25}$，并且 $270°<\alpha<360°$，计算 α 的其他各三角函数的值．

2．已知 $\operatorname{tg}\alpha=1.4$，并且 $180°<\alpha<270°$，求 $\cos\alpha$ 的值（精确到 0.01）．

3．已知 $\cos\alpha=-\dfrac{52}{173}$，并且 $90°<\alpha<180°$，计算 $\operatorname{tg}\alpha-\sec\alpha$ 的值．

4．设 $\operatorname{tg}\alpha=2$，计算 $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$ 的值．

5．证明下列各恒等式：

(1) $\sin^4\alpha+\cos^2\alpha+\sin^2\alpha\cos^2\alpha=1$；

(2) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$；

(3) $(\operatorname{cosec}\alpha-\sin\alpha)(\sec\alpha-\cos\alpha)(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha)=1$；

(4) $\operatorname{tg}^2\theta-\sin^2\theta=\operatorname{tg}^2\theta\sin^2\theta$；

(5) $(1-\operatorname{ctg}x+\operatorname{cosec}x)(1-\operatorname{tg}x+\sec x)=2$；

(6) $\dfrac{\cos\alpha\operatorname{cosec}\alpha-\sin\alpha\sec\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\operatorname{cosec}\alpha-\sec\alpha$；

(7) $\sin^2\alpha+\sin^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta+\cos^2\alpha\cos^2\beta=1$；

(8) $\dfrac{\sin(180°-\alpha)\sin(270°-\alpha)\operatorname{tg}(90°-\alpha)}{\sin(90°+\alpha)\operatorname{tg}(270°+\alpha)\operatorname{tg}(360°-\alpha)}=-\cos\alpha$；

(9) $\dfrac{\sin^2(180°+\alpha)}{\sin^2(270°+\alpha)}+\dfrac{\operatorname{tg}^2(270°+\alpha)}{\operatorname{ctg}^2(180°+\alpha)}=\sec^2(\alpha-360°)$；

(10) $(a\sin\alpha+b\cos\alpha)^2+(a\cos\alpha-b\sin\alpha)^2=a^2+b^2$.

6．把 $\sin^4\alpha-\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$ 化为只含 $\cos\alpha$ 的式子。

7．化简下列各式:

(1) $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha}$;　　　　(2) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha}{\sin^4\alpha-\cos^4\alpha}$;

(3) $\sin^2\alpha\operatorname{tg}\alpha+\cos^2\alpha\operatorname{ctg}\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha$;

(4) $\dfrac{\operatorname{tg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{tg}\alpha}$.

*8．已知 $\sin x+\cos x=a$，求 $\sin^3 x+\cos^3 x$ 和 $\sin^4 x+\cos^4 x$。

[例如：求 $\sin x\ \cos x$.

由题设　　$(\sin x+\cos x)^2=a^2$.

$\therefore\quad \sin^2 x+\cos^2 x+2\sin x\cos x=a^2$,

即　　$1+2\sin x\cos x=a^2$,

$\therefore\quad \sin x\cos x=\dfrac{a^2-1}{2}$.]

9．已知 $\operatorname{tg}x+\operatorname{ctg}x=2$，求 $\sin x$.

10．用 $\operatorname{ctg}\alpha$ 来表示 α 的其余五个三角函数.

本 章 提 要

1．任意角的三角函数的定义

设任意角 α 的顶点是 O，始边是 x 轴，终边上任意一点 P 的坐标是 (x,y)，OP 的长是 r，那末

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},\qquad \cos\alpha=\frac{x}{r},\qquad \operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y},\qquad \sec\alpha=\frac{r}{x},\qquad \operatorname{cosec}\alpha=\frac{r}{y}.$$

2．三角函数的诱导公式

设 α 是任意角，n 是整数:

(1) $n\cdot360°+\alpha$，$360°-\alpha$，$180°\pm\alpha$，$-\alpha$ 的三角函数的值，等于 α 的同函数的值，放上把 α 看作是锐角时，原来的函数在相应象限内的符号.

(2) $90^\circ\pm\alpha$, $270^\circ\pm\alpha$ 的三角函数的值，等于 α 的相应余函数的值，放上把 α 看作是锐角时，原来的函数在相应象限内的符号.

3. 把任意角的三角函数化成锐角的三角函数的步骤

任意负角的三角函数 ⟶ 任意正角的三角函数 ⟶ 小于 360° 的正角的三角函数 ⟶ 锐角的三角函数.

4. 已知一个三角函数的值等于 a，求角的步骤

(1) 求出同名函数的值等于 $|a|$ 的锐角；

(2) 然后求得适合于已知条件的 0° 到 360° 的角 x_1 和 x_2；

(3) $n\cdot360^\circ+x_1$ 和 $n\cdot360^\circ+x_2$ 就是所求的一切角.

5. 同角的三角函数间的关系

(1) 倒数关系

$$\sin\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha=1;$$
$$\cos\alpha\cdot\sec\alpha=1;$$
$$\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{ctg}\alpha=1.$$

(2) 商数关系

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha};$$
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

(3) 平方关系

$$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1;$$
$$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha;$$
$$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\operatorname{cosec}^2\alpha.$$

复习题二

1. 将下列各式化为角 α 的三角函数(n 为整数):

(1) $\sin(990^\circ+\alpha)$; (2) $\cos(630^\circ-\alpha)$;

(3) $\sin(1260^\circ+\alpha)$; (4) $\operatorname{tg}(540^\circ+\alpha)$;

(5) $\cos(\alpha-810^\circ)$; (6) $\operatorname{tg}(\alpha-n\cdot180^\circ)$;

(7) $\operatorname{ctg}(\alpha-1350^\circ)$; (8) $\operatorname{cosec}(\alpha-540^\circ)$.

2. 证明下列各等式(n 为整数):

(1) $\cos(n\cdot180^\circ-\alpha)=(-1)^n\cos\alpha$;

(2) $\sin[(2n-1)\cdot 90°+\alpha]=(-1)^{n+1}\cos\alpha$.

[例如：证明　　$\cos n\cdot 180°=(-1)^n$.

当 n 为奇数时，　$\cos n\cdot 180°=-1$;

当 n 为偶数时，　$\cos n\cdot 180°=1$;

$\therefore\quad \cos n\cdot 180°=(-1)^n$.]

*3．设 α,β 是 $0°$ 到 $360°$ 间的角，如果 $\sin\alpha=\sin\beta$，那末 α 与 β 间的关系如何？

*4．设 α,β 是 $0°$ 到 $360°$ 间的角，如果 $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta$，那末 α 与 β 间的关系如何？

5．求证 $\operatorname{cosec}(90°+A)\sec(360°-A)+\sin(180°+A)\sec A\cdot\operatorname{tg}(180°+A)=\operatorname{tg}(45°+A)\operatorname{tg}(45°-A)$.

6．设 $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{p}{q}$，求 $\dfrac{p\cos\alpha-q\sin\alpha}{p\cos\alpha+q\sin\alpha}$ 和 $\dfrac{1}{\sin^2\alpha+\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}$ 的值.

7．求证下列各恒等式：

(1) $(\sin\alpha+\cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)=\sin^3\alpha+\cos^3\alpha$;

(2) $(1-\sin\alpha+\cos\alpha)^2=2(1-\sin\alpha)(1+\cos\alpha)$;

(3) $\dfrac{1}{\sec\alpha+\operatorname{tg}\alpha}=\sec\alpha-\operatorname{tg}\alpha$;

(4) $\left(\dfrac{1}{\sec^2\alpha-\cos^2\alpha}+\dfrac{1}{\operatorname{cosec}^2\alpha-\sin^2\alpha}\right)\cos^2\alpha\sin^2\alpha$

$=\dfrac{1-\cos^2\alpha\sin^2\alpha}{2+\cos^2\alpha\sin^2\alpha}$;

*(5) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\dfrac{1}{\operatorname{cosec}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha}\ (0<\alpha<180°)$;

(6) $\dfrac{1}{\operatorname{cosec}x-\operatorname{ctg}x}-\dfrac{1}{\sin x}=\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{\operatorname{cosec}x+\operatorname{ctg}x}$;

(7) $\dfrac{\sec(-\alpha)+\sin(-\alpha-90°)}{\operatorname{cosec}(540°-\alpha)-\cos(-\alpha-270°)}=\operatorname{tg}^3\alpha$;

*(8) $\sin(30°+\alpha)\operatorname{tg}(45°+\alpha)\operatorname{tg}(45°-\alpha)\sec(60°-\alpha)=1$;

(9) $\dfrac{\sin(90°+\theta)+\cos(270°-\theta)}{\operatorname{ctg}(180°+\theta)+\operatorname{tg}(360°-\theta)}=\dfrac{\sin(360°-\theta)\sin(90°-\theta)}{\cos(180°-\theta)+\cos(90°+\theta)}$;

(10) $\dfrac{1+2\sin\alpha\sin(90^\circ+\alpha)}{\sin^2\alpha-\sin^2(270^\circ+\alpha)}=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+1}{\operatorname{tg}\alpha-1}$.

8. 已知 $\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta=a$，求 $\operatorname{tg}^2\theta+\operatorname{ctg}^2\theta$，$\operatorname{tg}^3\theta+\operatorname{ctg}^3\theta$ 的值.

9. 以 $\operatorname{tg}\theta$ 表 $2\sec^2\theta-\sec^4\theta-2\operatorname{cosec}^2\theta+\operatorname{cosec}^4\theta$.

10. 求下列各式的值:

(1) $2\cos 0^\circ+3\sin 90^\circ-4\cos 180^\circ+5\sin 270^\circ-6\cos 360^\circ$;

(2) $m\operatorname{tg}0^\circ+n\cos 90^\circ-p\sin 180^\circ-q\cos 270^\circ-r\sin 360^\circ$.

11. 讨论角 α 由 0° 变化到 360° 的时候，函数 $y=|\sin x|$ 的变化.

12. 决定下列各差的符号:

(1) $\sin 121^\circ-\sin 242^\circ$;　　(2) $\operatorname{tg}120^\circ-\operatorname{tg}121^\circ$;

(3) $\operatorname{ctg}200^\circ-\operatorname{ctg}210^\circ$;　　(4) $\sin 260^\circ-\sin 250^\circ$;

(5) $\cos 320^\circ-\cos 310^\circ$;　　(6) $\cos 110^\circ-\cos 130^\circ$.

13. 求下列各式的值·

(1) $\sin 840^\circ+\cos 750^\circ-\operatorname{tg}945^\circ+\sec 405^\circ$;

(2) $\cos 810^\circ+\sin(-930^\circ)-\operatorname{tg}(-1110^\circ)$;

(3) $\operatorname{cosec}(-870^\circ)+\operatorname{ctg}(-870^\circ)$.

*14. 设 $\sin\alpha=a\sin\beta$，$\operatorname{tg}\alpha=b\operatorname{tg}\beta$，求证 $\cos\alpha=\pm\sqrt{\dfrac{a^2-1}{b^2-1}}$.

15. 设 $a>0$，$b>0$，并且 $a\neq b$；下列各等式哪些不合理?为什么?

(1) $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$;　　(2) $\sec\beta=\dfrac{a^2}{a^2+b^2}$;

(3) $\operatorname{cosec}\gamma=\dfrac{a^2+b^2}{ab}$.

16. 求适合等式 $2\sin^2 x+\sqrt{3}\cos x+1=0$ 的 x 的一切值.

17. 不用查表计算下列各式的值:

(1) $\dfrac{\sin 101^\circ}{\cos 11^\circ}+\dfrac{\operatorname{tg}(45^\circ-x)}{\operatorname{ctg}(45^\circ+x)}$;　　(2) $\dfrac{\sin 217^\circ}{\cos 53^\circ}+\dfrac{\operatorname{tg}98^\circ}{\operatorname{tg}278^\circ}$.

*18. 已知 $\sec\alpha+\operatorname{cosec}\alpha=a$，求证

$$\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1\pm\sqrt{a^2+1}}{a^2}.$$

*19. 已知 $a\sec x-c\operatorname{tg}x=d$，$b\sec x+d\operatorname{tg}x=c$，求证 $a^2+b^2=c^2+d^2$.

第三章　三角函数的图象和性质

§3·1　弧　度　制

我们以前量角的大小时所用的单位是度．1度的角就是周角的$\frac{1}{360}$．这种用度做单位来量角的制度叫做**角度制**．量角的大小也可以不用度而用别的单位，就象量线段的长可以用米做单位，也可以用尺做单位一样．

1．弧度　我们知道，角是由射线围绕它的端点旋转而形成的．在形成角的同时，射线上的任意一点也必然旋转而形成一条弧．例如图3·1中，射线旋转而形成$n°$角的时候，射线上的任意一点A就旋转而形成一条弧AB．

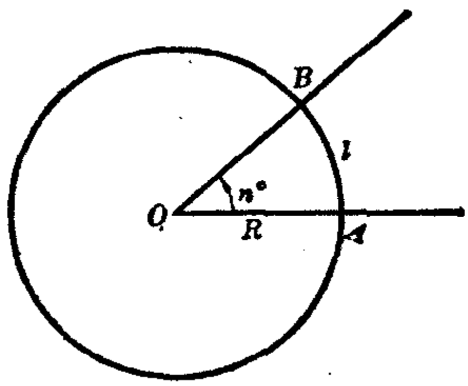


图　3·1

因为$n°$的圆心角所对的弧长l是整个圆的周长的$\frac{n}{360}$，而圆的周长等于半径R的2π倍，所以

$$l=\frac{n}{360}\cdot 2\pi R.$$

从这个等式可以得到

$$\frac{l}{R}=\frac{n}{360}\cdot 2\pi.$$

这就是说，一定大小的圆心角所对的弧长和半径的比是确定

不变的；它和半径的长短没有关系．由此，我们可以看到，不论在哪一个圆里，只要知道弧长和半径的比，那末，这弧所对的圆心角的大小就确定了．例如，弧长和半径的比等于1，也就是弧长等于半径的弧所对的圆心角是有一定大小的(图3·2)．这样的角叫做**1弧度的角**．我们可以用它作为量角的单位．

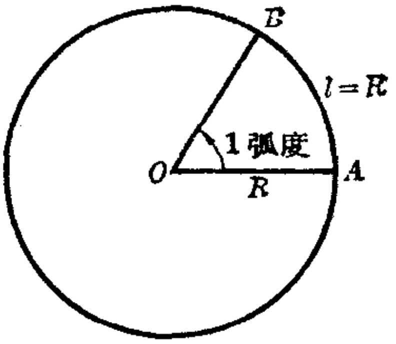


图 3·2

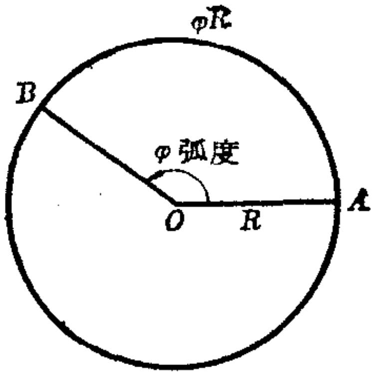


图 3·3

为了和角度制区别开来，用弧度做单位来量角的制度叫做**弧度制**①．

2．弧长公式　我们用字母φ表示角的弧度数．因为1弧度的圆心角所对的弧长等于半径R，所以φ弧度的圆心角所对的弧长l就等于φR(图3·3)．就是

$$l=\varphi R.$$

我们看到，采用了弧度制以后，计算弧长的公式特别简单．

例1．直径等于40厘米的轮子，以每秒45弧度的角速度旋转，求轮子圆周上一点在5秒钟内所经过的弧长．

【解】 轮子的半径$R=\dfrac{40}{2}=20$(厘米)．

① 弧度也叫做弪，所以弧度制也叫做弪制．

因为轮子的角速度就是它的半径在1秒钟内所转过的弧度数，所以这个轮子的半径在5秒钟内所转过的角 $\varphi=5\times45=225$ (弧度).

因此，弧长 $l=225\times20=4500$ (厘米).

答：轮周上一点所经过的弧长是45米.

3. 度与弧度的相互换算 我们知道，整个圆所对的圆心角是 $360°$ 的角. 现在我们来计算整个圆所对的圆心角的弧度数.

在公式 $l=\varphi R$ 中，用圆周长 $2\pi R$ 代替 l，得

$$2\pi R=\varphi R.$$

因此，
$$\varphi=\frac{2\pi R}{R}=2\pi.$$

这就是说，

$$360°=2\pi \text{ 弧度}.$$

由此可以得到

$$1°=\frac{2\pi}{360}\text{ 弧度}=\frac{\pi}{180}\text{ 弧度}$$
$$=\frac{3.1416}{180}\text{ 弧度}\approx0.017453\text{ 弧度}.$$

$$1\text{ 弧度}=\frac{360°}{2\pi}=\frac{180°}{\pi}$$
$$=\frac{180°}{3.1416}\approx57°18'.$$

利用所得到的关系，就可以对度和弧度相互换算.

例2. 把 $15°$ 化成弧度.

【解】 $15°=15\times\frac{\pi}{180}\text{弧度}=\frac{\pi}{12}\text{弧度}.$

如果需要求得这个弧度数的近似值，那末我们可以这样计算：

$15° = 15 \times 0.017453$ 弧度 $= 0.26180$ 弧度.

例 3. 把$\frac{7\pi}{10}$弧度化成度.

【解】 $\frac{7\pi}{10}$弧度$=\frac{7\pi}{10}\times\frac{180°}{\pi}=126°$.

角的大小可以说成1直角的几分之几，在弧度制中，我们通常把角的大小表示成π弧度的几分之几，而不用小数表示它的值. 下面表中所列的是一些常要用到的角的度数和弧度数的对应值:

度	360°	180°	90°	60°	45°	30°
弧度	2π 弧度	π 弧度	$\frac{\pi}{2}$弧度	$\frac{\pi}{3}$弧度	$\frac{\pi}{4}$弧度	$\frac{\pi}{6}$弧度

记熟了这些对应值，对度和弧度作相互换算，有时可以方便得多. 例如 15° 等于 30° 的$\frac{1}{2}$，所以把 15° 化成弧度，就应当是$\frac{\pi}{6}$弧度$\times\frac{1}{2}=\frac{\pi}{12}$弧度. 又如$\frac{5\pi}{6}$弧度是$\frac{\pi}{6}$ 弧度的5倍，所以把$\frac{5\pi}{6}$弧度化成度，就应当是 $30°\times5=150°$.

按照习惯，在用弧度来量角的时候，“弧度”两字可以略去不写. 例如$\alpha=\frac{2\pi}{3}$弧度，可以简写做$\alpha=\frac{2\pi}{3}$，$\frac{2\pi}{3}$弧度的角的正弦可以写做$\sin\frac{2\pi}{3}$等等.

我们把1°的圆心角所对的弧叫做1°的弧，同样把1弧度的圆心角所对的弧叫做1弧度的弧. 因此，$\sin x$，$\cos x$ 等等不仅可以理解为角x的函数，也可以理解为圆心角x所对的弧的函数. 进一步，由于量一个角或者一条弧总是得到一个实数，我们还可以把$\sin x$，$\cos x$ 等等看做是实数x的函数. 但是，在把三角函数$\sin x$，$\cos x$ 等等看做数x的

函数时，我们要把数 x 理解为角或者弧的弧度数(不是度数)，来求出对应的函数值．例如 $\sin 2$ 应该理解为 2 弧度的角或者弧的正弦，$\cos 20$ 是 20 弧度的角或者弧的余弦.

习　题　3·1

1．把下列各角的度数化为弧度数:

(1) $2°$;　(2) $5°$;　(3) $7°30'$;　(4) $12°30'$;

(5) $22.5°$;　(6) $200°$;　(7) $320°$.

2．把下列各角的弧度数化为度数:

(1) 0.4800;　(2) 0.0099;　(3) 2.6400;　(4) $\frac{3\pi}{5}$;

(5) $\frac{3\pi}{2}$;　(6) $\frac{\pi}{15}$;　(7) $\frac{\pi}{10}$;　(8) 3π.

3．已知 $200°$ 的圆心角所对的弧长等于 50cm，求圆的半径.

4．轮子每秒旋转 $\frac{5}{18}$ 弧度，20 秒钟内转了多大的角度?

5．设地球为一圆球体，已知地面上纬度相差 $1°$ 的两平行纬线相距 111.71km，求地球的半径.

*6．地球与太阳的平均距离约为 149460,000km，一人在地球上望见太阳所张的角为 $32'$；求太阳的直径.

[提示：因为太阳所张的角很小，所以我们可以把以人眼为圆心，地球与太阳间的距离为半径所作圆上截得的弧，近似地看作是太阳的直径.]

*7．一扇形的周长等于圆周长的一半，求扇形的角的度数.

8．求下列各三角函数的值:

(1) $\sin\frac{3\pi}{4}$;　(2) $\cos\left(\frac{-7\pi}{6}\right)$;　(3) $\operatorname{tg}\frac{5\pi}{3}$;　(4) $\operatorname{ctg}\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

9．$\cos 1°$ 与 $\cos 1$ 哪个大? 又 $\operatorname{tg}1°$ 与 $\operatorname{tg}1$ 哪个大?

10．一个大钟的长针长 2 尺 8 寸，20 秒间针端走了几寸?

*11．有时我们用一种特殊的单位来度量角，这种单位叫做密位．1 密位等于整个圆的 $\frac{1}{6000}$ 的弧所对的圆心角.

(1) 把1密位表示成弧度和度，把1弧度和1度表示成密位.

(2) 半径是 R 的圆上，一条弧所对的圆心角为 n 密位，导出弧长 l 的近似公式（取 $\pi\approx3$）：$l=\frac{nR}{1000}$.

(3) 物体 AB 的宽为16m，观测者在 O 点测得 $\angle AOB=20$ 密位，求观测者到物体的近似距离（把物体看作20密位的圆心角所对的弧，并取 $\pi\approx3$）。

§3·2 用线段表示三角函数

我们知道，角的三角函数是两个数的比；它们也是数．为了研究的方便，对于任何一个角，我们可以画出线段来，使它们的长带上规定的符号后（纵线段的符号规定和纵坐标的一样，横线段的符号规定和横坐标的一样），所得到的数等于已知角的各个三角函数的值．这样的线段就可以用来表示三角函数.

1．正弦线 在直角坐标系里，以原点 O 为圆心，以1个长度单位为半径，画一个圆．这个圆通常叫做单位圆．设单位圆和角 α 的终边相交于点 $P(x,y)$（图3·4）．从点 P 作 x 轴的垂线 MP.

根据正弦的定义，

$$\sin\alpha=\frac{y}{r},$$

这里，r 是线段 OP 的长．因为

$$r=1,$$

所以

$$\sin\alpha=y.$$

这就是说，$\sin\alpha$ 的值可以用线段 MP 的长连同它的符号来表示．线段 MP 叫做角 α 的**正弦线**.

2．余弦线 根据余弦的定义，在图3·4里，

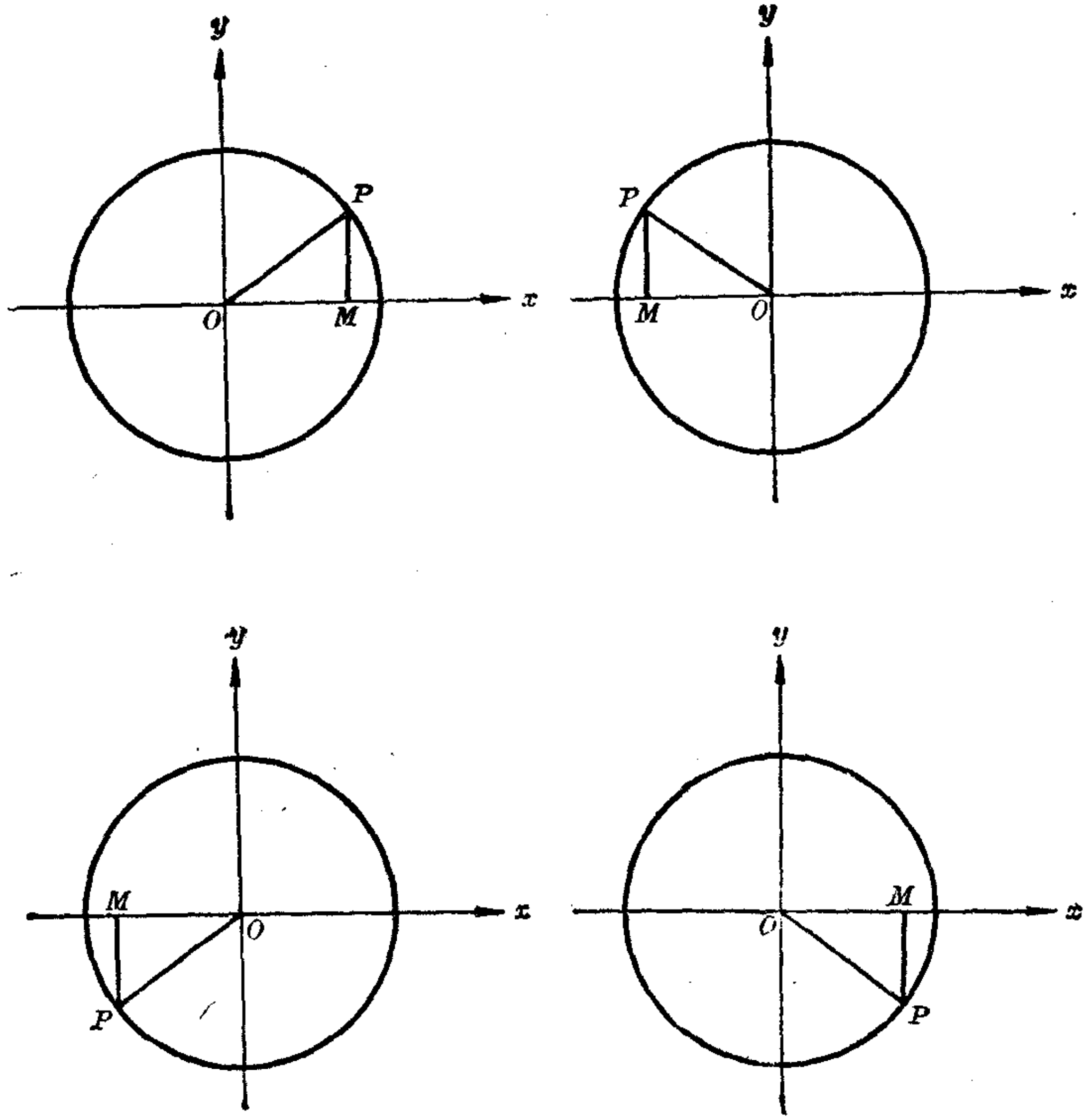


图 3·4

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{x}{1}=x.$$

这就是说，$\cos\alpha$ 的值可以用线段 OM 的长连同它的符号来表示. 线段 OM 叫做角 α 的**余弦线**.

3. 正切线 设单位圆和 x 轴的正方向相交于点 A，和角 α 的终边相交于点 $P(x, y)$. 作 MP 垂直于 x 轴. 过点 A 作单位圆的切线交 α 的终边或者它的延长线于 T (图 3·5).

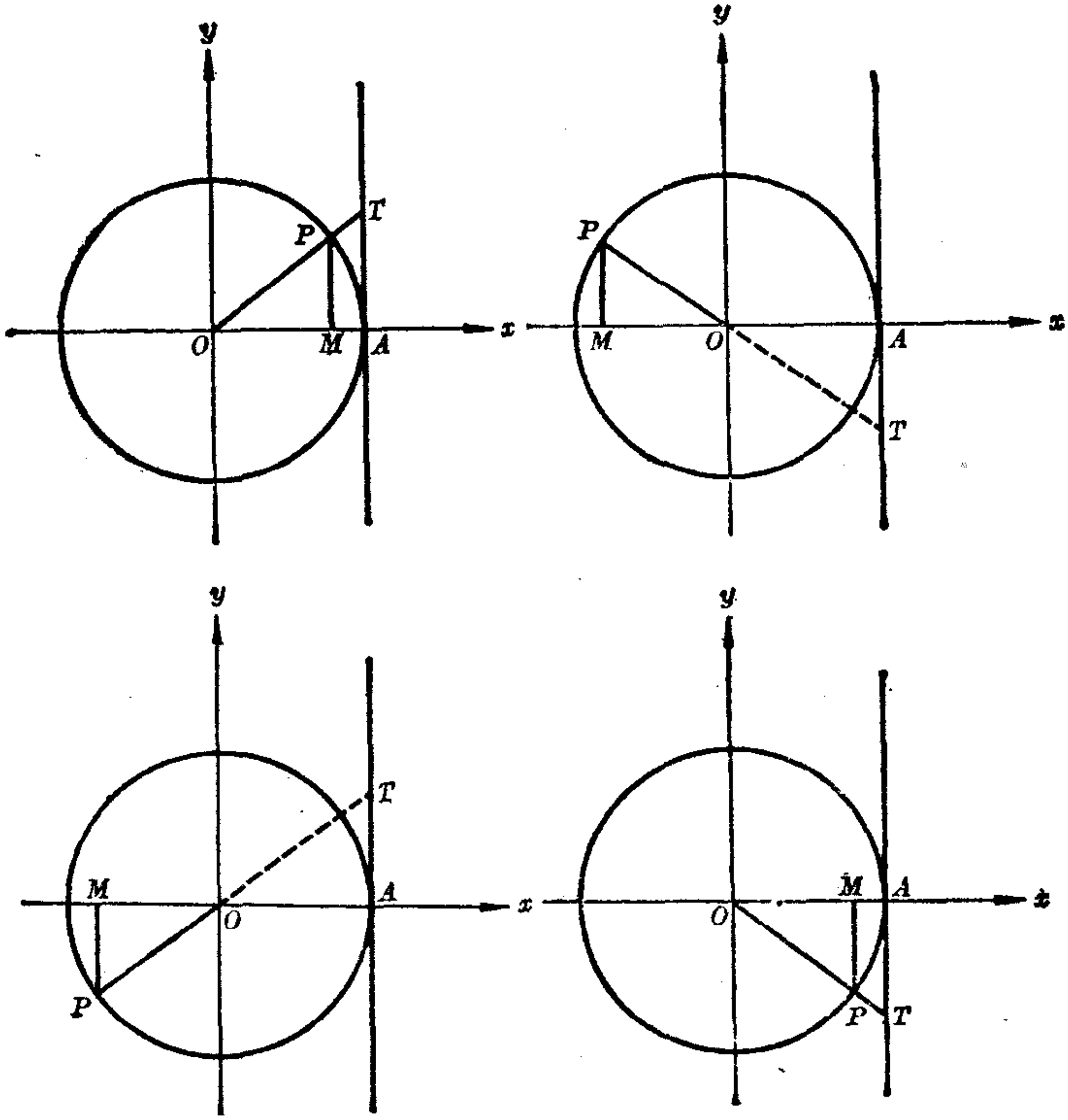


图 3·5

根据正切的定义，

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}.$$

设点 T 的坐标是$(x_1,\ y_1)$，那末，由 $\triangle OMP\sim\triangle OAT$，以及 y 和 x 的符号相同的时候，y_1 和 x_1 的符号也相同，y 和 x 的符号相反的时候，y_1 和 x_1 的符号也相反，可以看到

$$\frac{y}{x}=\frac{y_1}{x_1}.$$

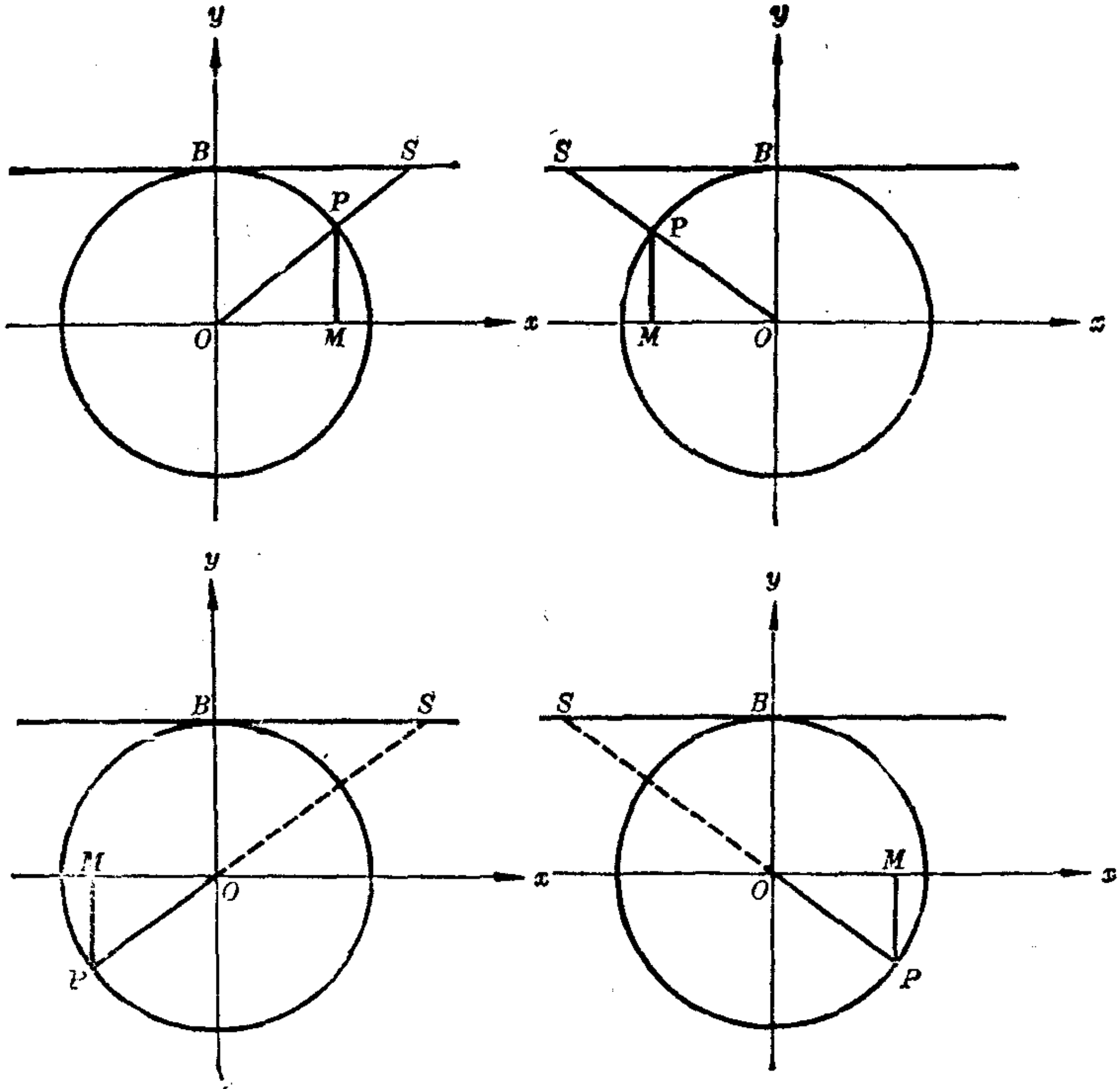


图 3·6

但 $$x_1=1,$$

因此， $$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y_1}{x_1}=y_1.$$

这就是说，$\operatorname{tg}\alpha$ 的值可以用线段 AT 的长连同它的符号来表示．线段 AT 叫做角 α 的**正切线**．

4．余切线 设单位圆和 y 轴的正方向相交于点 B，和角 α 的终边相交于点 $P(x, y)$．作 MP 垂直于 x 轴．过点 B 作单位圆的切线交 α 的终边或者它的延长线于 S（图 3·6）．

根据余切的定义，

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}.$$

设点 S 的坐标是 (x_2, y_2). 由 $\triangle OMP\sim\triangle SBO$, 以及 x 和 y 的符号相同的时候，x_2 和 y_2 的符号也相同，x 和 y 的符号相反的时候，x_2 和 y_2 的符号也相反，可以看出

$$\frac{x}{y}=\frac{x_2}{y_2}.$$

但
$$y_2=1,$$

因此，
$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x_2}{y_2}=x_2.$$

这就是说，$\operatorname{ctg}\alpha$ 的值可以用线段 BS 的长连同它的符号来表示. 线段 BS 叫做角 α 的**余切线**.

注意 正切线 AT 的端点 A 是单位圆与正半 x 轴的交点，余切线 BS 的端点 B 是单位圆与正半 y 轴的交点，不能画错.

习 题 3·2

1. 如果 $\alpha\neq\frac{n\pi}{2}$（n 为整数），试利用 α 的正弦线和余弦线验证

$$|\sin\alpha|+|\cos\alpha|>1 \text{ 和 } \sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.$$

2. 当 $0°<\alpha<90°$ 时，利用 α 的正切线和余切线验证：当 α 增大时，$\operatorname{tg}\alpha$ 也跟着增大，而 $\operatorname{ctg}\alpha$ 却跟着减小.

3. 设 $\alpha=40°$，作出 α 的正弦线和正切线；量出它们的长，并查表求 $\sin 40°$ 和 $\operatorname{tg}40°$ 的值，检验是否正确.

4. 利用线段表示 $\sin 200°$, $\cos 160°$, $\operatorname{ctg}290°$.

5. 利用正弦线和正切线验证 $|\operatorname{tg}\alpha|>|\sin\alpha|$.

§3·3 三角函数的图象

我们知道，角的正弦，余弦，正切，余切等是由角的大小所

确定的．对于每一个具有一定大小的角，一般说，都有确定的三角函数值和它对应．在§1·6里我们已经看到，当锐角的大小变化的时候，它的三角函数值也就相应地发生变化．这就是说，三角函数 $\sin x$, $\cos x$ 等的变化，是由角 x 的变化所引起的．我们把 x 叫做**自变量**．为了使自变量的变化所引起的三角函数的变化很明显地表示出来，我们可以利用代数中所讲的用图象表示函数关系的方法．

1、正弦函数 $y=\sin x$ 的图象 作三角函数的图象，角 x 的大小通常用弧度做单位．x 轴和 y 轴采用同一个长度单位．x 轴上的一个长度单位表示1弧度；y 轴上的一个长度单位表示1．

我们先给 x 以0到 2π 的一些值，计算出和它们对应的 y 的值(精确到0.01)．在下表中，假设 x 的值的间隔是 $\frac{\pi}{6}$ (就是30°)．

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	0.50	0.87	1.00	0.87	0.50	0

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	-0.50	-0.87	-1.00	-0.87	-0.50	0

取一个适当的长度单位，例如，我们可以取1厘米的线段作为长度单位．

因为 $2\pi=2\times3.1416\approx6.28$，所以我们在 x 轴上从原点

O 起，向右截取长 6.28 厘米的一条线段．把这条线段分成 12 等分，每一等分的长就是 $\frac{\pi}{6}$ 厘米(近似于 0.52 厘米)．于是在 x 轴上，我们得到依次表示 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, …的点．这样，我们很容易作出把表中的每一组对应值作为坐标的点．用一条平滑的曲线把这些点顺次连结起来，就得到正弦函数 $y=\sin x$ 从 $x=0$ 到 $x=2\pi$ 的一段图象(图 3·7)．很明显，这样作出的图象只是近似的．图象上的点作得越多，画出的图象也就越精确．

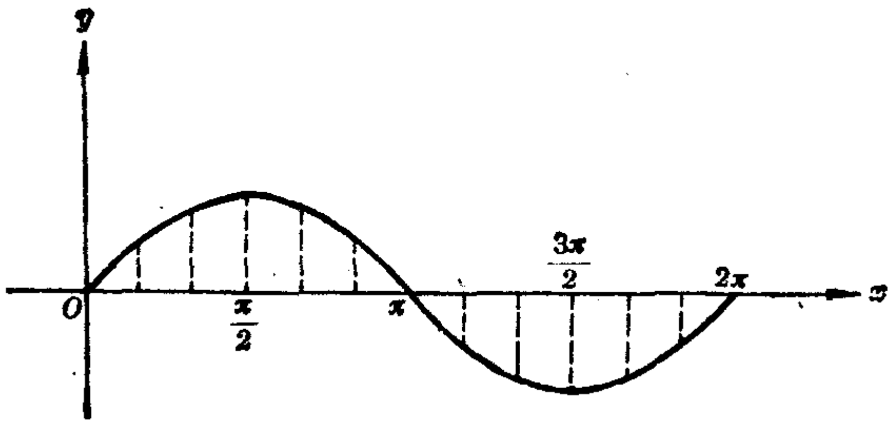


图 3·7

我们知道，终边相同的角的三角函数值相同．当角 x 从 2π 增大到 4π，从 4π 增大到 6π，等等，或者从 -2π 增大到 0，从 -4π 增大到 -2π，等等的时候，因为角的终边仍取得 0 到 2π 的各种位置，所以角的正弦必然也仍取得 0 到 2π 的各个角的正弦的值．因此，正弦函数 $y=\sin x$ 在 $x>2\pi$ 或者 $x<0$ 的各段的图象，可以用重复描绘 x 从 0 到 2π 间的一段图象来得到(图 3·8)．

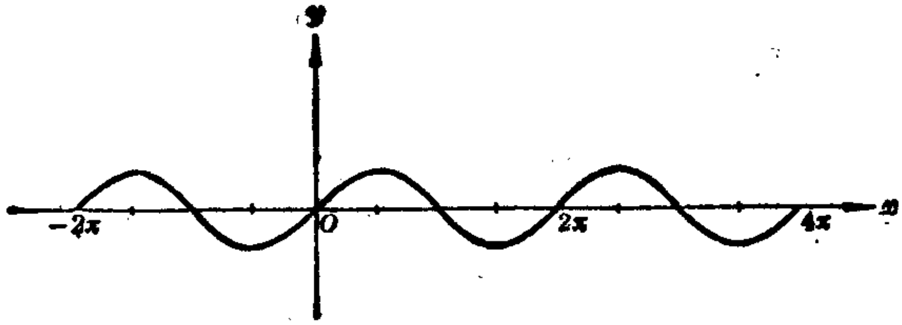


图 3·8

我们还可以纯粹用几何方法作正弦函数的图象.

作单位圆 O(图 3·9). 从圆上的点 A 起把这个圆分成 12 等分,同时把对应的圆心角也分成 12 等分. 过圆上的各个分点分别作 OA 的垂线,得到 0 到 2π 的各个角的正弦线. 例如: $\angle AOP_1=\frac{\pi}{6}$,它的正弦线是 M_1P_1; $\angle AOP_2=\frac{\pi}{3}$,它的正弦线是 M_2P_2; 等等. 这些正弦线的长连同它们的符号表示对应的角的正弦值.

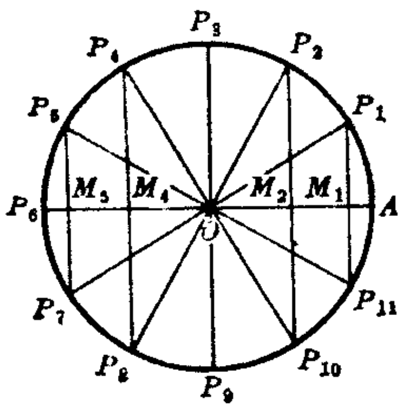


图 3·9

在直角坐标系里, 过 x 轴上表示 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, …的点作 x 轴的垂线. 在这些垂线上,按照对应角的正弦线在 OA 的上方或者下方, 分别向上或者向下截取等于正弦线的长的线段. 这样, 我们不利用 x 和 y 的对应数值表,也可以作出图 3·7 中的 $y=\sin x$ 从 $x=0$ 到 $x=2\pi$ 的一段图象.

在图 3·8 中可以很清楚地看出正弦函数的下列性质:

(1) 对于绝对值相等、符号相反的两个 x 值, $\sin x$ 的绝对值相等,符号相反;

(2) 对于相差 2π 的两个 x 值, $\sin x$ 的值相等;

(3) 当 x 从 $-\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\sin x$ 的值逐渐增大；当 x 从 $\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{3\pi}{2}$ 时，$\sin x$ 的值逐渐减小；

(4) $\sin x$ 的值最大等于 1，最小等于 -1；等等.

2．余弦函数 $y=\cos x$ 的图象 要作余弦函数 $y=\cos x$ 的图象，我们也可以先给 x 以 0 到 2π 每隔 $\frac{\pi}{6}$ 的一些值，列出 x 和 y 的对应数值表：

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	1	0.87	0.50	0	-0.50	-0.87	-1

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	-0.87	-0.50	0	0.50	0.87	1

把每一组对应值作为点的坐标，作出对应的各点，再用平滑的曲线把它们连结起来，就得到余弦函数 $y=\cos x$ 从 $x=0$ 到 $x=2\pi$ 的一段图象(图 3·10).

根据始边和终边都相同时角的余弦也相同这一性质，在 x 等于 2π 到 4π，4π 到 6π，…，或者 -2π 到 0，-4π 到 -2π，…的各段内，重复描绘 0 到 2π 的一段图象，可以得到任何范围内的余弦函数的图象(图 3·11).

利用图 3·9 中的余弦线 OM_1，OM_2 等，我们也可以用几何方法作出余弦函数的图象.

3．正切函数 $y=\mathrm{tg}\,x$ 的图象 当角的大小变化时，它的正切的值变化比较剧烈，所以要作正切函数 $y=\mathrm{tg}\,x$ 从 $x=0$

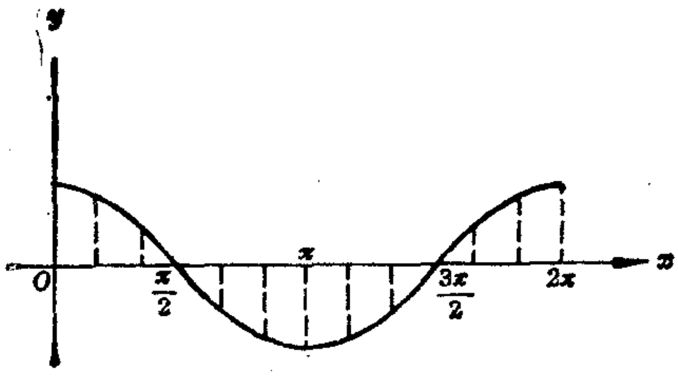


图 3·10

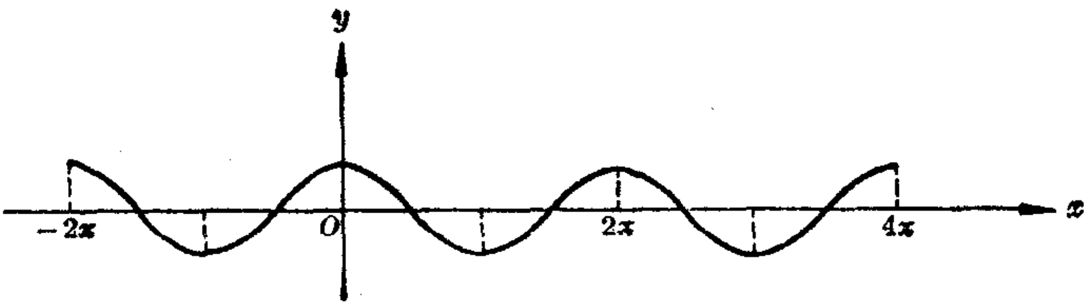


图 3·11

到 $x=2\pi$ 的图象，我们除了给 x 以每隔$\frac{\pi}{6}$的一些值以外，再插进 $\frac{5\pi}{12}$，$\frac{7\pi}{12}$，$\frac{17\pi}{12}$，$\frac{19\pi}{12}$ 等几个值，列出 x 和 y 的对应数值表．列表时还要注意，当 $x=\frac{\pi}{2}$ 和 $x=\frac{3\pi}{2}$ 的时候，$\operatorname{tg}x$ 是不存在的．

把每一组对应值作为点的坐标，作出对应的各点．

因为当 x 的值由左边和右边趋近于$\frac{\pi}{2}$时，y 分别取正值和负值，并且绝对值无限增大，所以用平滑的曲线连结各点时，在$x=\frac{\pi}{2}$的左边，曲线应向上无限伸展，在 $x=\frac{\pi}{2}$的右边，

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{12}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
y	0	0.58	1.73	3.73	—	−3.73	−1.73	−0.58	0

x	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{17\pi}{12}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y	0.58	1.73	3.73	—	−3.73	−1.73	−0.58	0

曲线应向下无限伸展．在 $x=\frac{3\pi}{2}$ 的近旁，曲线伸展的情况也是一样．这样，我们就得到三条曲线(图 3·12)．它们是 $y=\operatorname{tg}x$ 从 $x=0$ 到 $x=2\pi$ 的图象．

把上面画出的图象重复描绘在 $x=2\pi$ 到 $x=4\pi$, $x=-2\pi$ 到 $x=0$ 等各段内，可以看到，正切函数的整个图象是由无数条曲线所组成的．它们被 x 轴上过点 $\pm\frac{\pi}{2}$, $\pm\frac{3\pi}{2}$, …的垂线隔离着(图 3·13)．

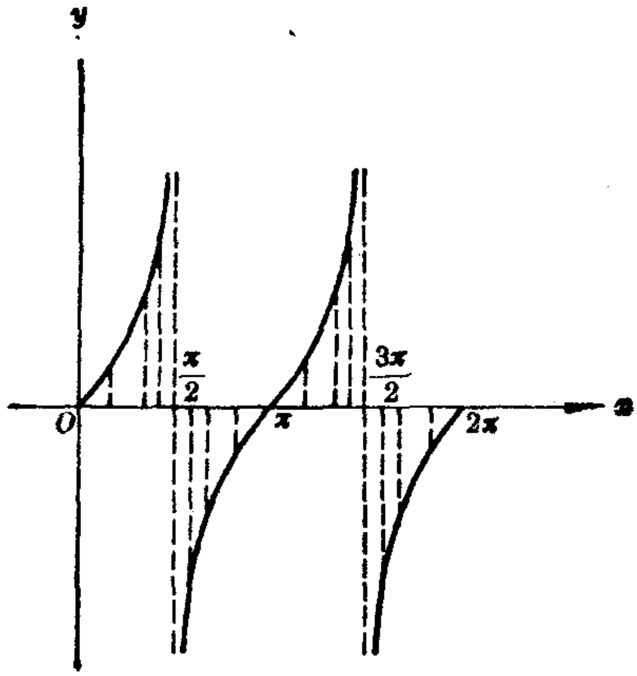


图 3·12

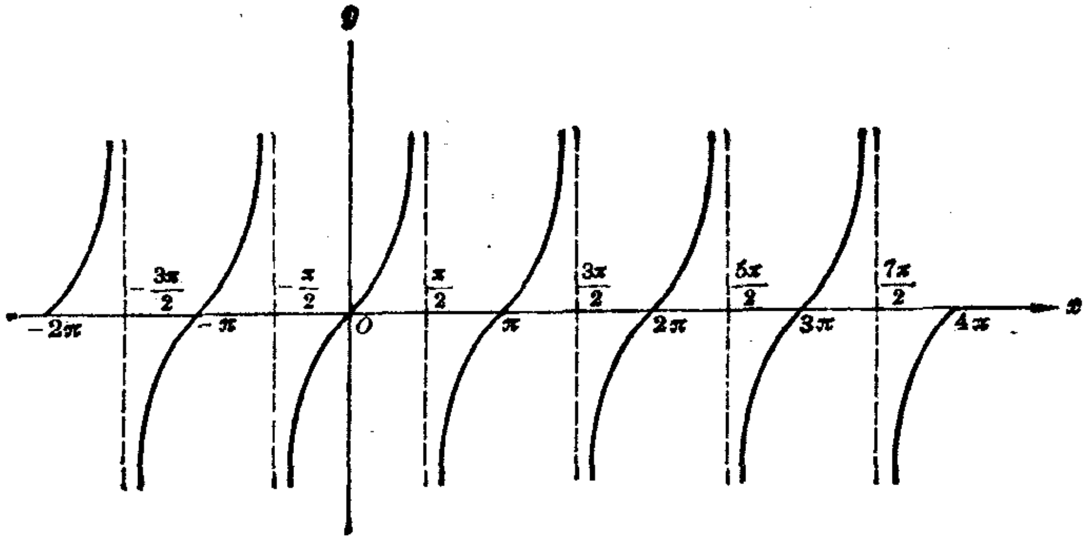


图 3·13

用几何方法也可以作正切函数的图象．作单位圆 O(图 3·14)．从圆上的点 A 起把这个圆分成 12 等分．过各个分点作圆的半径，得到以 OA 为公共始边的 0 到 2π 的各个角．过 A 作圆 O 的切线，交各条终边或者它们的延长线于 T_1，T_2，…．我们就得到 $\frac{\pi}{6}$，$\frac{\pi}{3}$，…的正切线 AT_1，AT_2，…．根据它们的长和应取的符号，就可以作出函数 $y=\text{tg}\,x$ 的图象上的点．

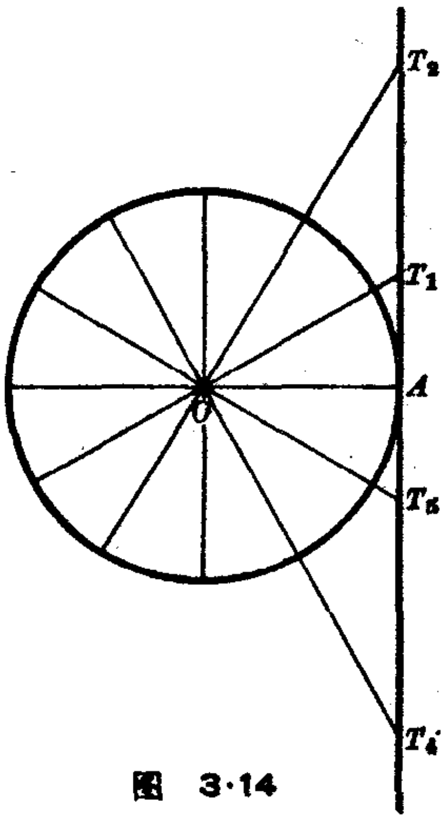


图 3·14

在图 3·13 中，可以看出正切函数的下列性质：

(1) 对于绝对值相等、符号相反的两个 x 值，$\text{tg}\,x$ 的绝对值相等，符号相反；

(2) 对于相差 π 的两个 x 值，$\text{tg}\,x$ 的值相等；

(3) 当 x 从 $-\frac{\pi}{2}$ 增大到 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\text{tg}x$ 的值逐渐增大；

(4) $\operatorname{tg} x$ 可以取任何数值；等等.

4. 余切函数 $y=\operatorname{ctg} x$ 的图象 先给 x 从 0 到 2π 间的一些值，列出 x 和 y 的对应数值表：

x	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
y	—	3.73	1.73	0.58	0	−0.58	−1.73	−3.73	—

x	$\frac{13\pi}{12}$	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{11\pi}{6}$	$\frac{23\pi}{12}$	2π
y	3.73	1.73	0.58	0	−0.58	−1.73	−3.73	—

注意，当 $x=0$, π 和 2π 时，$\operatorname{ctg} x$ 不存在. 把每一组对应值作为点的坐标，作出各点. 按照点的分布趋势，用两条平滑的曲线把它们连结起来，就得到 $x=0$ 和 $x=2\pi$ 间的余切函数的图象(图 3·15).

余切函数的整个图象，是被经过 x 轴上的点 0, $\pm\pi$, $\pm 2\pi$, …所作的 x 轴的垂线隔离开来的(图 3·16).

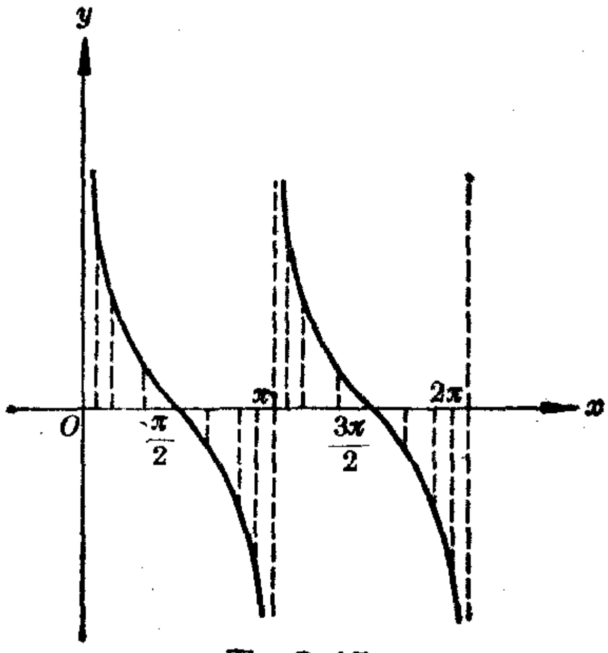


图 3·15

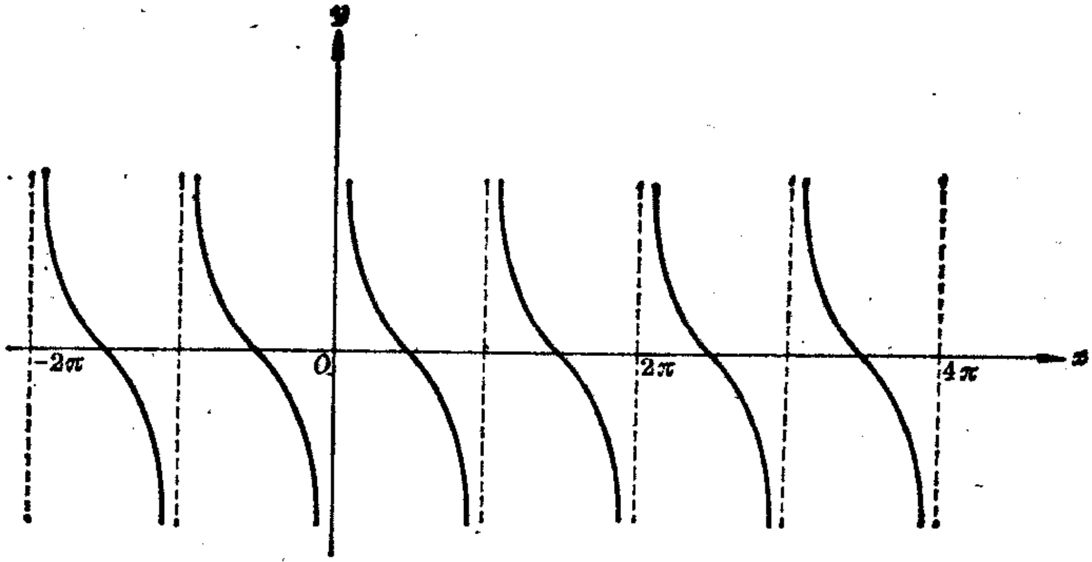


图 3·16

利用图 3·17 中 0 到 2π 间各个角的余切线，我们可以用几何方法作出余切函数的图象。

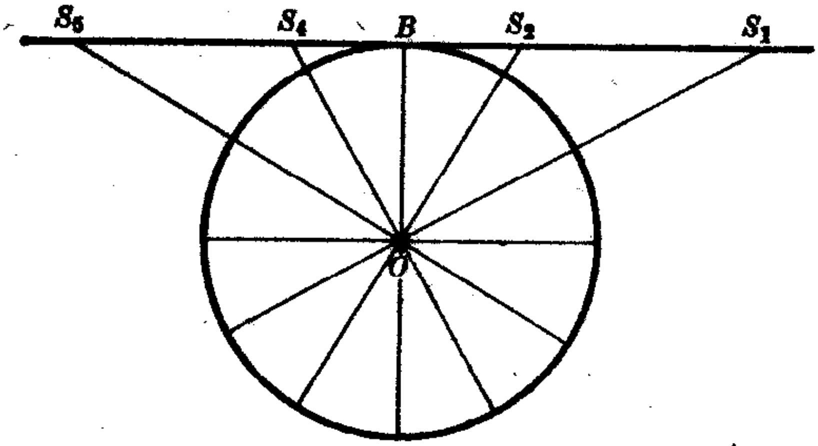


图 3·17

习 题 3·3

1. 从 $y=\sin x$ 的图象，说明：(1) x 从 $-\dfrac{3\pi}{2}$ 到 $-\pi$ 时，$\sin x$ 的值增大还是减小？是正还是负？(2) $\sin(-210^\circ)$ 与 $\sin(-60^\circ)$ 的值哪个

大？(3)对应于$x=\frac{\pi}{6}$，$\sin x$有多少个值？(4) 对应于$\sin x=\frac{1}{2}$，x有多少个值？

2．从$y=\cos x$的图象，回答下列问题：(1) 当x从$-\pi$变到$-\frac{\pi}{2}$的时候，$\cos x$的值增大还是减小？是正的还是负的？(2) x是什么值的时候，$\cos x$的值是零？(3) x是什么值的时候，$\cos x$取得极大值和取得极小值？

3．$y=\sin x$和$y=\cos x$的图象中，哪一个关于原点为对称？哪一个关于y轴为对称？

*4．作出下列各函数的图象$(0\leqslant x\leqslant 2\pi)$，并且和$y=\sin x$的图象相比较，说明这些图象和$y=\sin x$的图象的区别：

(1) $y=|\sin x|$；　　(2) $y=2\sin x$；

(3) $y=\sin 2x$；　　(4) $y=1+\sin x$．

5．从$y=\operatorname{tg} x$和$y=\operatorname{ctg} x$的图象，回答下列问题：(1) 对于x的哪些值，$\operatorname{tg} x$不存在？$\operatorname{ctg} x$不存在？(2) x是什么值的时候，$\operatorname{tg} x$的值是零？$\operatorname{ctg} x$的值是零？(3) $\operatorname{tg} x$和$\operatorname{ctg} x$的值存在的时候，是增大还是减小？

§3·4　三角函数的定义域

我们已经知道，对于正弦函数和余弦函数来说，不论角α取什么值，$\sin\alpha$和$\cos\alpha$总是有意义的．但是对于其他四个函数来说，就不是这样，例如当$\alpha=\frac{\pi}{2}$时，$\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$是不存在的．现在我们来研究，在各个三角函数中，角$\alpha$取值的范围究竟是怎样的？

设$P(x, y)$是角α终边上的一点，OP的长为r．根据角的正弦的定义，$\sin\alpha=\frac{y}{r}$．不论角α的终边在哪里，$\sin\alpha$总是存在的．因为我们总可以在终边上取一点P，使OP的长r不

等于零，从而可求出$\frac{y}{r}$的值．由此可知，正弦函数 $y=\sin x$ 的自变量 x 可以取任何实数值．

某一个函数的自变量可以取的值的全体，叫做这个函数的**定义域**．例如，正弦函数的定义域是一切实数．

同样，根据余弦的定义 $\cos\alpha=\frac{x}{r}$，可以知道余弦函数的定义域也是一切实数．

根据定义，$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}$．当 $\alpha=\frac{\pi}{2}$ 或者 $\frac{3\pi}{2}$时，终边上任意一点的横坐标等于零，所以角 α 的正切不存在．我们还知道，和$\frac{\pi}{2}$终边相同的一切角是$2n\pi+\frac{\pi}{2}$；和$\frac{3\pi}{2}$终边相同的一切角是 $2n\pi+\frac{3\pi}{2}=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{2}$，这里 n 是任意整数．这些角的正切当然也不存在．因此，正切函数的定义域是除掉$2n\pi+\frac{\pi}{2}$和$(2n+1)\pi+\frac{\pi}{2}$以外的所有实数．注意 $2n$ 是偶数，$2n+1$ 是奇数．任意整数不是偶数就是奇数．这样，我们还可以说得简单些，正切函数的定义域是除掉 $k\pi+\frac{\pi}{2}$ 以外的所有实数，这里 k 表示任意整数．

同样，从余切函数的定义 $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}$，可以知道，当 $\alpha=0$ 和 $\alpha=\pi$ 的时候，由于终边上任意一点的纵坐标等于零，角 α 的余切不存在． 和这些角的终边相同的角 $2n\pi$ 和 $2n\pi+\pi=(2n+1)\pi$ 的余切也不存在．所以余切函数的定义域是除掉$2n\pi$ 和 $(2n+1)\pi$ 以外的所有实数，或者简单地说成除掉 $k\pi$ 以外的所有实数．

在研究任何一个函数的变化性质以前，首先要明确它的

定义域．因为只有当自变量取它可以取的值时，才可以研究函数值的变化．反过来说，如果自变量所取的值不在定义域内，那末函数值根本不存在，当然谈不到函数值的变化了．

例1．求函数 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ 的定义域．

【解】 根据正切函数的定义域，可以知道，

$$\frac{x}{2}\neq n\pi+\frac{\pi}{2},$$

就是 $$x\neq 2n\pi+\pi,\ x\neq(2n+1)\pi.$$

所以函数 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ 的定义域是除去 $(2n+1)\pi$ 以外的全体实数，这里 n 是整数．

例2．x 在什么条件下，恒等式 $\sin x \operatorname{cosec} x=1$ 能够成立？

【解】 函数 $\sin x$ 的定义域是全体实数，但是函数 $\operatorname{cosec} x$ 的定义域是除去 $n\pi$ 的全体实数．所以这个恒等式只有当

$$x\neq n\pi$$

时才能成立，这里 n 是整数．

习　题　3·4

1．求下列各函数的定义域：

(1) $y=\operatorname{ctg}\frac{x}{3}$；　(2) $y=\sqrt{\sin x}$；

(3) $y=\operatorname{tg}x+\sec x$；　(4) $y=\frac{1}{\operatorname{tg}x-\operatorname{ctg}x}$．

2．x 在什么条件下，下列各恒等式才能成立？

(1) $\operatorname{tg}2x=\frac{\sin 2x}{\cos 2x}$；　(2) $\operatorname{tg}x\cdot\operatorname{ctg}x=1$；

(3) $\sec 4x=\frac{1}{\cos 4x}$；　(4) $\sin^2 x+\cos^2 x=1$．

3. 设 $\alpha=\frac{\pi}{2}$，下列各诱导公式哪些是正确的？哪些失效？

(1) $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$;　　(2) $\operatorname{tg}(\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$;

(3) $\operatorname{ctg}(\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$;　　(4) $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\operatorname{ctg}\alpha$;

(5) $\sec(\pi-\alpha)=-\sec\alpha$;　　(6) $\operatorname{cosec}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\sec\alpha$.

§3·5 三角函数的性质

在§3·3中，我们已经从图象上直观地看到，当自变量在定义域中变化时，三角函数随着变化的某些性质．在这一节中，我们将根据三角函数的定义，有系统地研究一下这些性质．

1．三角函数的奇偶性

我们看到，图3·8正弦函数 $y=\sin x$ 的图象是对称于坐标原点的．绝对值相等而符号相反的两个 x 值，对应着不同的 y 值，它们的绝对值相等而符号相反．

实际上，从诱导公式

$$\sin(-x)=-\sin x$$

可以知道，改变自变量的符号，函数值的符号也改变，但绝对值不变．

我们又看到，图3·11余弦函数 $y=\cos x$ 的图象是对称于 y 轴的．绝对值相等而符号相反的两个 x 值，对应着相同的 y 值．

实际上，从诱导公式

$$\cos(-x)=\cos x$$

可以知道，改变自变量的符号，函数值不变．

一般地说，设 $f(x)$ 是 x 的任何一个函数，如果

$$f(-x)=-f(x),$$

那末 $f(x)$ 叫做**奇函数**；如果

$$f(-x)=f(x),$$

那末 $f(x)$ 叫做**偶函数**．

这样，我们可以说：正弦函数 $y=\sin x$ 是奇函数；余弦函数 $y=\cos x$

是偶函数.

如果点(x, y)是奇函数的图象上的一点，那末$(-x, -y)$一定也是它的图象上的一点. 所以奇函数的图象对称于原点. 如果(x, y)是偶函数的图象上的一点，那末$(-x, y)$一定也是它的图象上的一点. 所以偶函数的图象对称于y轴.

因为$\operatorname{tg}(-x)=-\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(-x)=-\operatorname{ctg} x$，所以正切函数和余切函数都是奇函数，它们的图象都对称于原点。

习　题　3·5(1)

1. 对于x的任意值，$\sec(-x)=\sec x$是不是总能成立？ 函数$y=\sec x$是不是偶函数？

2. 对于x的任意值，$\operatorname{cosec}(-x)=-\operatorname{cosec} x$是不是总能成立？ 函数$y=\operatorname{cosec} x$是不是奇函数？

3. 决定下列各函数是偶函数，还是奇函数，或者都不是：(1)$x\sin x$；(2)$|\sin x|$；(3)$\cos 2x+\sec x$；(4)$\sin x+\cos x$；(5)$\sin x+\operatorname{ctg} x$；(6)$\sin(180°+x)$；(7)$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}+x\right)$；(8)$\cos^2 x-\sin^2 x$；(9)$x\operatorname{tg}2x+x^3$；(10)$\operatorname{ctg}(\pi-x)$.

4. 根据$\sin\pi=\sin(-\pi)=0$，能不能就此断定$\sin x$是偶函数？为什么？

2．三角函数的周期性

在§3·3中作正弦函数$y=\sin x$的图象时，我们利用有相同始边和终边的角的正弦都相等这一性质，重复描绘x从0到2π间的一段图象来得到任意范围内的正弦函数的图象. 由于始边和终边都相同的角相差2π的整数倍，上述性质可以用下面的式子表示:

$$\sin(x\pm 2\pi)=\sin(x\pm 4\pi)=\cdots\cdots=\sin x.$$

当自变量在函数的定义域内变化，如果对于它的一切值每增加一定值(正数或者负数)的时候，函数值重复出现，那末，这样的函数叫做**周期函数**. 这个一定值，叫做这个周期函数的**周期**.

这样，我们可以说，正弦函数是周期函数，$\pm 2\pi$，$\pm 4\pi$，……都是它的周期. 根据三角函数的定义，我们很容易知道，其他的三角函数也都是周期函数，并且$\pm 2\pi$，$\pm 4\pi$，……也都是它们的周期.

对于一个周期函数 $y=f(x)$ 来说，如果存在一个最小正数 l，能够使

$$f(x+l)=f(x)$$

这个等式对于 x 在定义域内的一切值都成立，那末，l 叫做函数 $f(x)$ 的**最小正周期**.

正弦函数的最小正周期是 2π.

因为 $$\sin(x+2\pi)=\sin x,$$

所以 2π 是正弦函数的周期. 是否还有小于 2π 的正数 l 能够使

$$\sin(x+l)=\sin x \tag{1}$$

对于 x 的一切值都成立呢？ 我们用反证法来证明这样的数不存在. 假定我们能找到某一个小于 2π 的正数 l，使等式(1)对于 x 的一切值都成立. 那末当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，等式(1)也应当成立. 但当 $x=\frac{\pi}{2}$ 时，等式(1)变成

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}+l\right)=\sin\frac{\pi}{2},$$

也就是 $$\cos l=1.$$

这是不可能的，因为小于 2π 的正角的余弦都不等于 1. 所遇到的矛盾证明了正弦函数的最小正周期是 2π.

相仿地，可以证明余弦函数的最小正周期也是 2π.

我们再来证明正切函数的最小正周期是 π.

根据诱导公式

$$\operatorname{tg}(x+\pi)=\operatorname{tg} x,$$

可以知道 π 是正切函数的周期.

假定存在小于 π 的正数 l 能够使

$$\operatorname{tg}(x+l)=\operatorname{tg} x \tag{2}$$

对于 x 一切可以取的值都成立. 我们令 $x=0$. 于是等式(2)变成

$$\operatorname{tg} l=0.$$

但小于 π 的正角的正切都不等于零. 推出的矛盾就证明了正切函数的最小正周期是 π.

相仿地，我们可以证明余切函数的最小正周期也是 π.

因为正弦函数和余弦函数的最小正周期是 2π，所以它们的图象每过 2π 一定重复出现. 因为正切函数和余切函数的最小正周期是 π，所

以它们的图象每过 π 必重复出现. 画周期函数的图象，只要画出一个最小正周期内的图象，然后在右边和左边重复描绘就可以了. 因此，找出周期函数的最小正周期，对于描绘图象和研究函数的性质有很大的帮助.

下面举例说明怎样求某些三角函数的最小正周期.

例 1. 求 $y=2\cos 3x$ 的最小正周期.

【解】 这就是要找出对于 x 的一切值能够使

$$2\cos 3(x+l)=2\cos 3x \tag{a}$$

成立的最小正数 l.

因为余弦函数的最小正周期是 2π，所以 2π 是加到 $3x$ 的一切值上，能够使函数值重复出现的最小正数:

$$2\cos(3x+2\pi)=2\cos 3x.$$

这个等式可以写成

$$2\cos 3\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)=2\cos 3x.$$

和等式(a)比较，我们看到

$$l=\frac{2\pi}{3}.$$

所以这个函数的最小正周期就是 $\frac{2\pi}{3}$.

例 2. 求 $y=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right)$ 的最小正周期.

【解】 因为正切函数的最小正周期是 π，所以 π 是加到 $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}$ 的一切值上，能够使函数值重复出现的最小正数:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}+\pi\right)=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right).$$

把这个等式写成

$$\operatorname{tg}\left[\frac{1}{2}(x+2\pi)+\frac{\pi}{6}\right]=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{6}\right).$$

根据最小正周期的定义，就知道这个函数的最小正周期是 2π.

例 3. 求 $y=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的最小正周期.

【解】 因为

$$2\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}+2\pi\right)=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right),$$

就是

$$2\sin\left[4\left(x+\frac{\pi}{2}\right)-\frac{\pi}{3}\right]=2\sin\left(4x-\frac{\pi}{3}\right),$$

所以原来函数的最小正周期是$\frac{\pi}{2}$.

习　题　3·5(2)

1．等式$\sin\left(\frac{7\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}\right)=\sin\frac{7\pi}{6}$能不能成立？如果能成立，能不能说$\frac{2\pi}{3}$是$\sin x$的周期？为什么？

2．求下列各函数的最小正周期:

(1) $y=-\operatorname{ctg}\frac{x}{2}$;　　(2) $y=|\sin x|$;

(3) $y=2\sin\left(ax+\frac{\pi}{3}\right)$;　　(4) $y=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{a}+\frac{\pi}{6}\right)$;

(5) $y=\cos\frac{2x}{7}$;　　(6) $y=\sin 2x+\cos 3x$.

3．求证$y=\sec x$的最小正周期为2π.

4．举出一个周期函数的例子，它的最小正周期是:

(1) 3π;　(2) $\frac{\pi}{6}$;　(3) $\frac{2\pi}{3}$;　(4) $\frac{\pi}{4}$.

5．求证$y=\sin\frac{\pi x}{a}(a>0)$的最小正周期为$2a$.

3．三角函数的单调性

观察三角函数图象中曲线的升降，可以得到关于函数值增减的一个初步印象．为了进一步明确三角函数值当自变量在不同范围内变化时的增减情况，我们可以利用三角函数线，因为它们直接表示三角函数的值．显然，由于三角函数具有周期性，对于任何一个三角函数，我们只要研究它在一个最小正周期内的变化就可以了．现在对各个三角函数分别讨论如下:

(1) 在图3·8的正弦函数图象中，我们看到，在从$-\frac{\pi}{2}$到$\frac{3\pi}{2}$这

个最小正周期里，正弦函数的值先增大，后减小．现在观察图 3·9 中对应于$-\frac{\pi}{2}$到$\frac{3\pi}{2}$的正弦线的变化，注意它们的长和它们所对应的数的符号，我们很容易知道．

当x从$-\frac{\pi}{2}$变到 0 时，$\sin x$从-1增大到 0；

当x从 0 变到$\frac{\pi}{2}$时，$\sin x$从 0 增大到 1；

当x从$\frac{\pi}{2}$变到π时，$\sin x$从 1 减小到 0；

当x从π变到$\frac{3\pi}{2}$时，$\sin x$从 0 减小到-1．

由此可知，当角x增大时，适合于$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}$的角的正弦增大；适合于$\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{3\pi}{2}$的角的正弦减小．

两个数α和$\beta(\alpha<\beta)$之间的一切数，包括α和β本身在内，叫做以α和β为端点的**闭区间**，记做$[\alpha, \beta]$．

对于一个函数来说，当自变量在某一个区间内增大时，如果函数值也增大，那末就说函数在这个区间内**递增**；如果函数值反而减小，那末就说函数在这个区间内**递减**．

因此，我们可以说，正弦函数在闭区间$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$内递增，在闭区间$\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$内递减．

因为正弦函数的最小正周期是2π，所以它在闭区间$\left[2n\pi-\frac{\pi}{2}, 2n\pi+\frac{\pi}{2}\right]$内都递增，在闭区间$\left[2n\pi+\frac{\pi}{2}, 2n\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$内都递减．这里$n$是任意的整数．

在某一个区间内，不论函数递增或者递减，我们都说函数在这个区间内具有**单调性**，而这个区间叫做函数的**单调区间**．因此，正弦函数的单调区间是$\left[2n\pi-\frac{\pi}{2}, 2n\pi+\frac{\pi}{2}\right]$和$\left[2n\pi+\frac{\pi}{2}, 2n\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$．

研究函数的单调性就是要找出它的单调区间．

(2) 在图 3·11 的余弦函数的图象中，我们看到，在从 0 到 2π 这一个最小正周期里，余弦函数的值起先减小，后来增大．观察图 3·9 中对应于 0 到 2π 的余弦线的变化，我们看到：

当 x 由 0 变到$\frac{\pi}{2}$时，$\cos x$ 由 1 减小到 0；

当 x 由$\frac{\pi}{2}$变到 π 时，$\cos x$ 由 0 减小到 -1；

当 x 由 π 变到$\frac{3\pi}{2}$时，$\cos x$ 由 -1 增大到 0；

当 x 由$\frac{3\pi}{2}$变到 2π 时，$\cos x$ 由 0 增大到 1.

由此可知，余弦函数在闭区间$[0, \pi]$内递减，在闭区间$[\pi, 2\pi]$内递增.

因为余弦函数的最小正周期是 2π，所以它在闭区间$[2n\pi, 2n\pi+\pi]$都递减；在闭区间$[2n\pi+\pi, 2n\pi+2\pi]$都递增. 换句话说，余弦函数的单调区间是闭区间$[2n\pi, (2n+1)\pi]$和$[(2n+1)\pi, (2n+2)\pi]$. 这里 n 是任意的整数.

(3) 在图 3·13 的正切函数的图象中，我们看到，在$-\frac{\pi}{2}$和$\frac{\pi}{2}$之间的一个最小正周期里，正切函数的值递增. 但$-\frac{\pi}{2}$和$\frac{\pi}{2}$不在正切函数的定义域内. 因为这时它们的正切不存在. 观察图 3·14中对应于$-\frac{\pi}{2}$和$\frac{\pi}{2}$之间的正切线的变化，可以看到：

当 x 由略大于$-\frac{\pi}{2}$的值变到 0 时，$\operatorname{tg} x$ 由负值增大到 0；

当 x 由 0 变到略小于$\frac{\pi}{2}$的值时，$\operatorname{tg} x$ 由 0 起逐渐增大.

由此可知，当角 x 增大时，适合于$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}$的角的正切增大.

两个数 α 和 $\beta(\alpha<\beta)$之间的一切数，不包括 α 和 β 在内，叫做以 α 和 β 为端点的**开区间**，记做(α, β).

因此，我们可以说，正切函数在开区间$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$内递增.

因为正切函数的最小正周期是 π，所以它在任何的开区间$\left(n\pi-\frac{\pi}{2}, n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$内都递增. 这里，$n$ 是任意的整数. 这就是说，正切函数的单调区间是任何一个开区间$\left(n\pi-\frac{\pi}{2}, n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$.

(4) 在图 3·16 的余切函数的图象中，我们看到，在 0 和 π 之间的一个最小正周期中，余切函数的值递减. 但 0 和 π 不在余切函数的定

义域内，因为这时它们的余切不存在．观察图3·17中对应于0和π之间的余切线的变化，可以看到

当x由略大于0的值变到$\frac{\pi}{2}$时，$\operatorname{ctg} x$由正值减小到0；

当x由$\frac{\pi}{2}$变到略小于π的值时，$\operatorname{ctg} x$由0起逐渐减小．

由此可知，余切函数在开区间$(0, \pi)$内递减．

因为余切函数的最小正周期是π，所以它在任何的开区间$(n\pi, n\pi+\pi)$内都递减．这里，n是任意的整数．

从函数的图象上来讲，在递增区间内，曲线从左到右向上伸展；在递减区间内，曲线从左到右向下伸展．因此，在三角函数的图象中，可以清楚地看到各个函数的单调区间．

习　题　3·5(3)

1．α在什么范围内$\sec\alpha$递增？什么范围内递减？

2．α在什么范围内$\operatorname{cosec}\alpha$递增？什么范围内递减？

3．求适合于$\sin\alpha \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}$的角$\alpha$的范围($\alpha$是0到$2\pi$间的角)．

4．求同时适合于$\sin\alpha \geqslant \frac{1}{2}$和$\operatorname{tg}\alpha \leqslant -1$的角$\alpha$的范围($\alpha$是0到$2\pi$间的角)．

5．角α的终边在哪些象限内，$y=1-\sin\alpha$递增？哪些象限内递减？

6．已知$y=-\operatorname{tg}x$，x在什么范围内，函数递增？x在什么范围内，函数递减．

7．当α在第三象限内变化时，六个三角函数中哪几个递增？哪几个递减？

4．三角函数的有界性

在图3·8和图3·11的正弦函数和余弦函数的图象中，我们看到，曲线的上下变动范围，不超过一个单位．相反的，在图3·13和图3·16中，正切函数和余切函数的图象，都是由向上和向下无限伸展的曲线所组成的．

实际上，在单位圆中，正弦线和余弦线的长不能超过圆的半径．这说明角的正弦和余弦的绝对值不能超过1；就是

$$|\sin\alpha|\leqslant 1,\quad |\cos\alpha|\leqslant 1.$$

而正切线和余切线可以无限的长，因而可以知道，角的正切和余切的绝对值是不受限制的．

如果存在一个正数 N，对于自变量 x 的每一个可以取的值，函数 $f(x)$的绝对值不超过 N，就是

$$|f(x)|\leqslant N,$$

那末，这个函数叫做**有界函数**，否则叫做**无界函数**．

因此，正弦函数和余弦函数都是有界函数，正切函数和余切函数都是无界函数．

有界函数的图象一定夹在平行于 x 轴的两条直线之间，无界函数的图象就不是这样．

习　题　3·5(4)

1．$y=\sec 4x$ 是有界函数吗？为什么？

2．已知 a，b 都是正数，且 $a\neq b$，下列等式中哪些不能成立？为什么？

(1) $\cos\alpha=\dfrac{2ab}{a^2+b^2}$；　　(2) $\sin\alpha=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$；

(3) $\sec\alpha=\dfrac{2\sqrt{ab}}{a+b}$；　　(4) $\cos\alpha=\dfrac{a^2+1}{2a}$；

(5) $\sin\alpha=a+\dfrac{1}{a}$．

3．已知 $\operatorname{tg}x$ 无界而 $\cos x$ 有界，$y=\operatorname{tg}x\cdot\cos x$ 是有界还是无界？

§3·6　一般正弦函数 $y=A\sin(nx+\alpha)$ 的图象

现在我们来研究物理学中很有用的一个函数 $y=A\sin(nx+\alpha)$的图象．为了便于理解，我们先举例说明怎样画 $y=A\sin x$，$y=\sin nx$，$y=\sin(x+\alpha)$的图象．

1. $y=A\sin x(A>0)$的图象

例 1. 画出函数 $y=2\sin x$ 的图象.

【解】 对于 x 的每一个值, $y=2\sin x$ 的图象上的纵坐标是 $y=\sin x$ 图象上的纵坐标的 2 倍. 因此,要画出 $y=2\sin x$ 的图象,只要把 $y=\sin x$ 的图象上每一点的纵坐标乘以 2, 而横坐标仍保持原来的值(图 3·18).

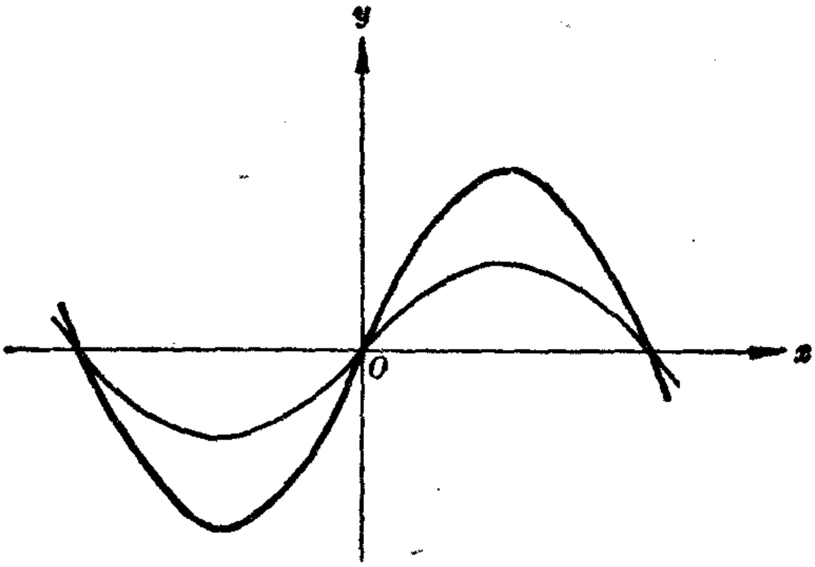


图 3·18

例 2. 画出函数 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 的图象.

【解】 把 $y=\sin x$ 的图象上每一点的纵坐标乘以$\frac{1}{2}$, 而横坐标仍保持原来的值, 就可以得到 $y=\frac{1}{2}\sin x$ 的图象(图 3·19).

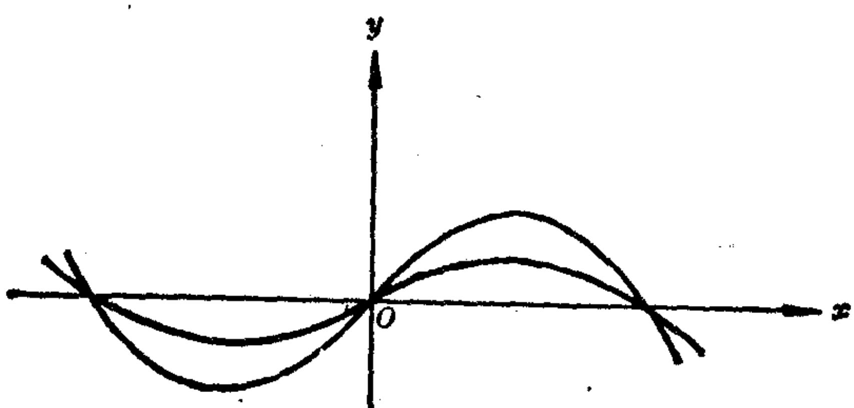


图 3·19

一般地说，要画出 $y=A\sin x$ 的图象，只要把 $y=\sin x$ 的图象上各点的纵坐标乘以 A，而横坐标仍保持原来的值.

在函数 $y=A\sin x(A>0)$ 里，数 A 叫做**振幅**. 由 $y=\sin x$ 的图象得到 $y=A\sin x$ 的图象，叫做**振幅变换**.

2. $y=\sin nx\,(n>0)$ 的图象

例 3. 画出函数 $y=\sin 2x$ 的图象.

【解】 在函数 $y=\sin 2x$ 中，如果 x 的值等于函数 $y=\sin x$ 中 x 的值的一半，那末两个函数的值相等. 例如，在函数 $y=\sin 2x$ 中，令 $x=\frac{\pi}{6}$，在函数 $y=\sin x$ 中，令 $x=\frac{\pi}{3}$，那末，两个函数的值都等于 $\frac{\sqrt{3}}{2}$.

由此可知，要画出 $y=\sin 2x$ 的图象，只要把 $y=\sin x$ 的图象上每一点的横坐标除以 2，而纵坐标仍保持原来的值(图 3·20).

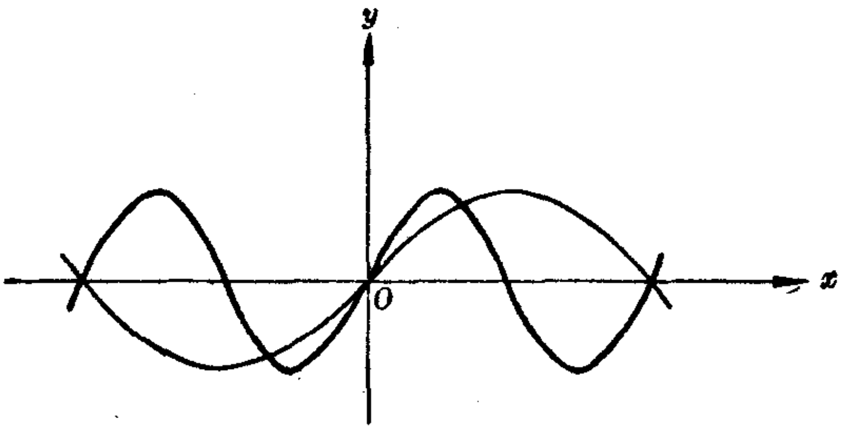


图 3·20

例 4. 画出函数 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的图象.

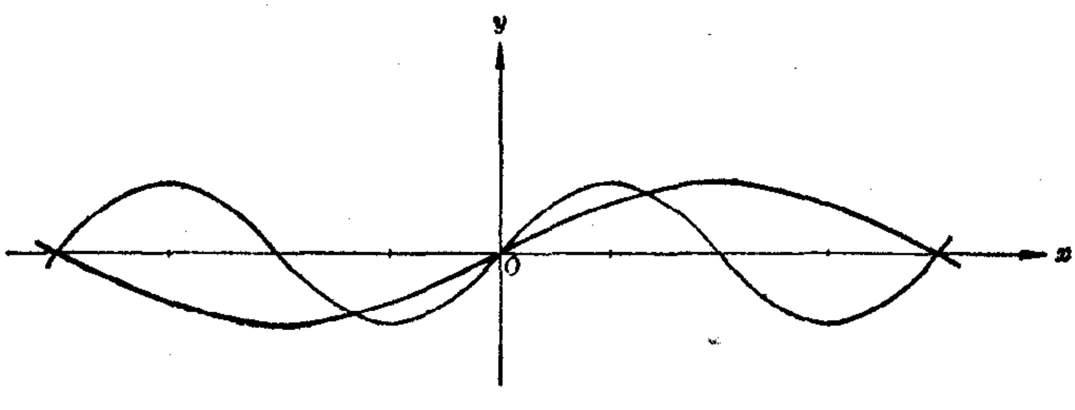


图 3·21

【解】 把 $y=\sin x$ 的图象上每一点的横坐标除以 $\frac{1}{2}$，而纵坐标保持原来的值，就可以得到 $y=\sin\frac{1}{2}x$ 的图象(图 3·21)。

一般地说，要画出 $y=\sin nx$ 的图象，只要把 $y=\sin x$ 的图象上每一点的横坐标除以 n，而纵坐标仍保持原来的值.

函数 $y=\sin nx(n>0)$ 的周期是 $\frac{2\pi}{n}$，而函数 $y=\sin x$ 的周期是 2π. 由 $y=\sin x$ 的图象求得 $y=\sin nx$ 的图象叫做**周期变换**.

3. $y=\sin(x+\alpha)$ 的图象

例 5. 画出函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象.

【解】 在函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$中，如果 x 的值等于函数 $y=\sin x$ 中 x 的值减去 $\frac{\pi}{4}$，那末两个函数的值相等. 例如，在函数 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ 中，令$x=\frac{\pi}{2}$，在函数 $y=\sin x$ 中，令 $x=\frac{3\pi}{4}$，两个函数的值都等于$\frac{\sqrt{2}}{2}$.

由此可知，要画出 $y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象，只要把 $y=\sin x$ 的图象上每一点的横坐标减少$\frac{\pi}{4}$，而纵坐标仍保持原来的值. 这只要把 y 轴向右平移等于$\frac{\pi}{4}$ 的一段距离就可以了. 在图 3·22 中，曲线对于用虚线画出的 y' 轴来说，是函数 $y=\sin x$ 的图象，对于 y 轴来说，是函数$y=\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$的图象.

例 6. 画出函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$的图象.

【解】 要画出 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象，应当把 $y=\sin x$ 的图象上每一点的横坐标增加$\frac{\pi}{3}$，而纵坐标仍保持原来的值. 这只要把 y 轴向左平移等于 $\frac{\pi}{3}$ 的一段距离就可以了. 在图 3·23 中，曲线对于 y' 轴来说，是函数 $y=\sin x$ 的图象，而对于 y 轴来说，是函数 $y=\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)$ 的图象.

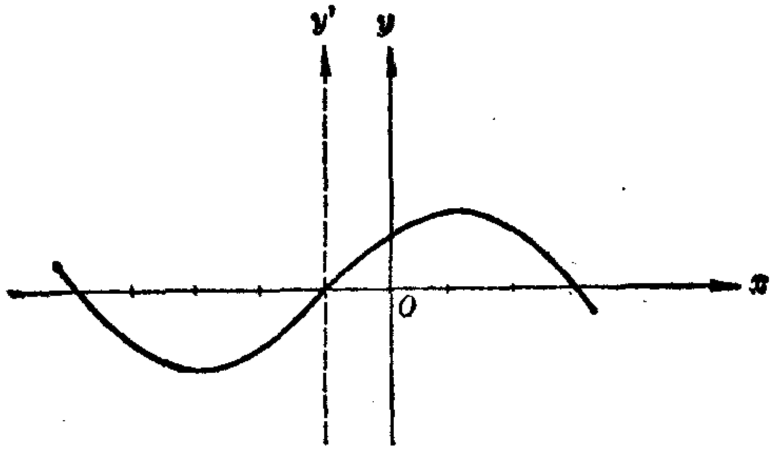


图 3·22

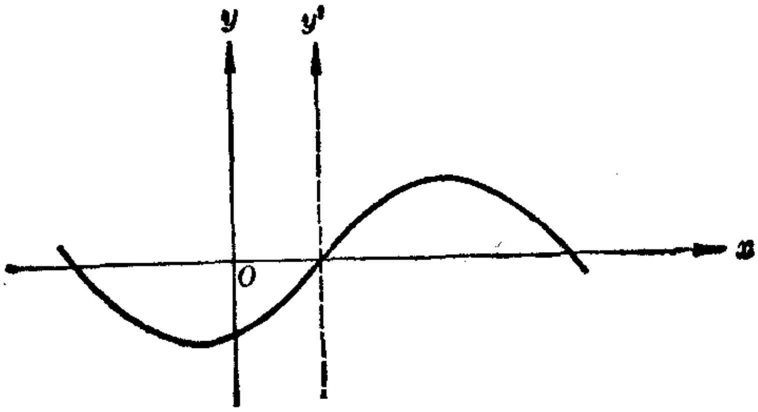


图 3·23

一般地说，要画出 $y=\sin(x+\alpha)$ 的图象，应当先画出 $y=\sin x$ 的图象．当 $\alpha>0$ 时，把 y 轴向右平移一段距离 α；当 $\alpha<0$ 时，把 y 轴向左平移一段距离 $|\alpha|$．

在函数 $y=\sin(x+\alpha)$ 中，$x+\alpha$ 的值叫做**相位**．对于同一个 x 值，$y=\sin(x+\alpha)$ 与 $y=\sin x$ 有不同的相位．把 $y=\sin x$ 的图象变成 $y=\sin(x+\alpha)$ 的图象，叫做**相位变换**．

综合应用上面各个例题中的方法，我们来研究函数 $y=A\sin nx$ 和 $y=A\sin(nx+\alpha)$ 的图象．

例 7． 画出函数 $y=2\sin 3x$ 的图象．

【解】 把函数 $y=\sin x$ 的图象上每一点的横坐标除以 3，纵坐标乘以 2，就得到函数 $y=2\sin 3x$ 的图象上的点(图 3·24)，

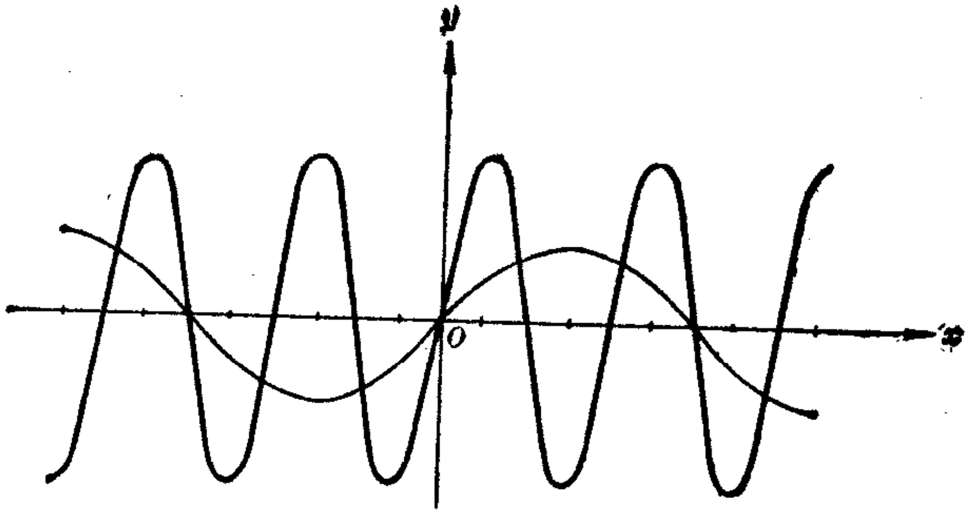


图 3·24

一般地说，要画出函数 $y=A\sin nx$ 的图象，只要把函数 $y=\sin x$ 的图象上每一点的横坐标除以 n，同时把纵坐标乘以 A.

例 8. 画出函数 $y=2\sin(3x+\pi)$的图象.

【解】 先画出 $y=2\sin 3x$ 的图象.

把 $y=2\sin(3x+\pi)$ 写成 $y=2\sin 3\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$. 从后面一个等式可以知道，把 $y=2\sin 3x$ 的图象上每一点的横坐标减少 $\frac{\pi}{3}$，而纵坐标保持原来的值，就能够得到 $y=2\sin(3x+\pi)$的图象上的点. 这只要把 y 轴向右平移等于$\frac{\pi}{3}$ 的一段距离就可以了. 在图 3·25 中，曲线对于 y' 轴来说，是 $y=2\sin 3x$ 的图象，而对于 y 轴来说，是 $y=2\sin(3x+\pi)$的图象.

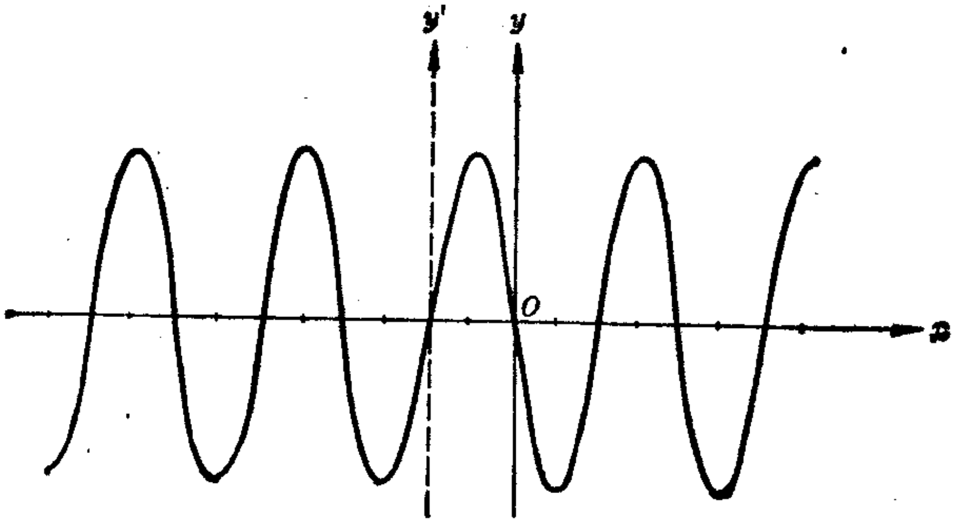


图 3·25

一般地说,要画出 $y=A\sin(nx+\alpha)$ 的图象,应当先画出 $y=A\sin nx$ 的图象,然后把 y 轴向右或者向左平移等于 $\frac{|\alpha|}{n}$ 的一段距离. 当 $\alpha>0$ 时,向右平移; 当 $\alpha<0$ 时, 向左平移. 对于新的坐标轴来说, 曲线就是 $y=A\sin(nx+\alpha)$的图象.

习　题　3·6

1. 作出下列各函数的图象($0\leqslant x\leqslant 2\pi$), 并且和 $y=\sin x$ 的图象相比较,说明这些图象和 $y=\sin x$ 的图象的区别:

(1) $y=2\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$;　　　(2) $y=\sin\left(\frac{\pi}{3}-2x\right)$.

2. 不画出下列各函数的图象, 说明这些图象和 $y=\sin x$ 的图象的区别:

(1) $y=3\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right)$;　　　(2) $y=\frac{1}{2}\sin(2x+1)$.

3. 作出 $y=\frac{1}{3}\cos\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)$ 的图象, 并且说明和 $y=\cos x$ 的图象的区别.

4. 作出 $y=2\cos\left(\frac{\pi}{6}-3x\right)$ 的图象, 并指出它的最小正周期和单调区间.

5. 作出 $y=\frac{1}{3}\sin\left(\frac{x}{3}+\frac{4\pi}{3}\right)+2$的图象, 并指出它的最小正周期和单调区间.

6. 利用图象求适合于 $\sin(x-1)=x-1$ 的 x 的值.

本 章 提 要

1. 度和弧度的相互换算公式

$$1^\circ=\frac{\pi}{180}\text{弧度},\qquad 1\text{弧度}=\frac{180^\circ}{\pi}.$$

2. 三角函数线 设单位圆 O 和角 α 的终边相交于点 P (图3·26), 那末

$$\sin\alpha=y,\ \cos\alpha=x,\ \operatorname{tg}\alpha=y_1,\ \operatorname{ctg}\alpha=x_2.$$

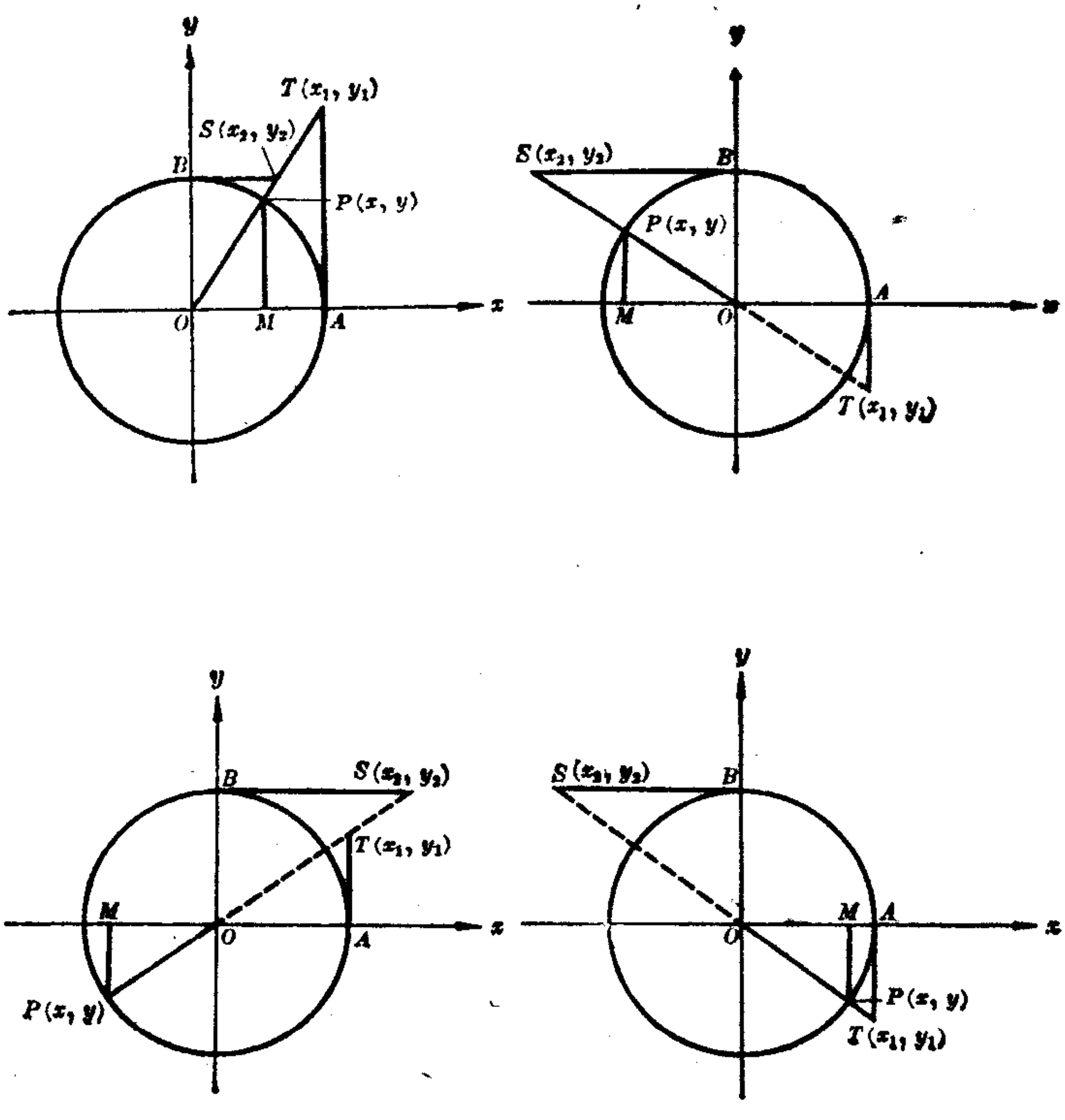


图 3·26

3. 三角函数的定义域和基本性质

函　　数	定　义　域	奇偶性	最小正周期
$y=\sin x$	一切实数	奇	2π
$y=\cos x$	一切实数	偶	2π
$y=\operatorname{tg} x$	$x\neq n\pi+\dfrac{\pi}{2}$	奇	π
$y=\operatorname{ctg} x$	$x\neq n\pi$	奇	π

函　　数	递　增　区　间	递　减　区　间	有界性
$y=\sin x$	$\left[2n\pi-\frac{\pi}{2},\ 2n\pi+\frac{\pi}{2}\right]$	$\left[2n\pi+\frac{\pi}{2},\ 2n\pi+\frac{3\pi}{2}\right]$	有界
$y=\cos x$	$[2n\pi+\pi, 2n\pi+2\pi]$	$[2n\pi,\ 2n\pi+\pi]$	有界
$y=\operatorname{tg} x$	$\left(n\pi-\frac{\pi}{2},\ n\pi+\frac{\pi}{2}\right)$		无界
$y=\operatorname{ctg} x$		$(n\pi,\ n\pi+\pi)$	无界

复 习 题 三

1．设两角的差为 $1°$，它们的和为 1 弧度，这两角各有多少弧度？

2．设地球的直径为 12714 公里，张于太阳的角为 $17.5''$，已知太阳的光线经过 8 分 18.3 秒达到地球，光线的速度是每秒多少公里？

3．作出角 α 的正弦线，余弦线和正切线，验证：$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$．

4．x 在什么范围内，下列各式可以成立：

(1) $\operatorname{tg}x-\sqrt{3}<0$；　　(2) $|\sin x|>\frac{\sqrt{2}}{2}$．

5．求下列各式中 x 和 y 所在的区间：

(1) $y=\sqrt{\cos x-\frac{\sqrt{3}}{2}}$；　　(2) $y=\operatorname{ctg}x\sin x$；

(3) $y=1+\sqrt{\sec x}$．

*6．x 在什么范围内，下列等式才能成立：

(1) $|\cos x|=\cos(-x)$；　　(2) $\cos|x|=\cos(-x)$；

(3) $|\sin x|=-\sin x$．

7．当 x 取 0 到 2π 间的什么值的时候，$y=\sin x-\cos x$ 的值：

(1) 变成 0；　　(2) 是正的；　　(3) 是负的．

8．$\sin 2$ 与 $\sin 3$ 哪个大？又 $\sec 1$ 与 $\sec 2$ 哪个大？

*9．求下列各函数的最小正周期：

(1) $y=\sin a\pi x$；　　(2) $y=\operatorname{tg}\pi x+\cos\pi x$；

(3) $y=\operatorname{ctg}\left(1+\frac{3\pi x}{5}\right)$．

*10．举出一个周期函数的例子，它的最小正周期是：

(1) 2;　　　　(2) $\frac{1}{2}$;　　　　(3) 5π.

*11. $|\sin x|$和$\sin|x|$是否同是偶函数或奇函数？如果它们有相同的奇偶性，能不能说$|\sin x|=\sin|x|$？为什么？

*12. $f(x)$在什么条件下，$|f(x)|$才是偶函数？

*13. 求$y=-\sin 2x$的单调区间和最小正周期．它是奇函数还是偶函数？

*14. 作$y=\sin x+\cos x$和$y=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$的图象，它们有什么区别？

*15. 下列各函数在x取什么值的时候有极大值或者极小值？极大值和极小值各等于多少？

(1) $y=3+\frac{2}{3}\cos\left(\frac{3x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$;　　(2) $y=2-\sin\left(3x-\frac{\pi}{4}\right)$.

[例如：求$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的极大值和极小值．

解：因为$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的极大值为1，所以当$2x+\frac{\pi}{3}=2n\pi+\frac{\pi}{2}$，即$x=n\pi+\frac{\pi}{12}$时，$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$取得极大值3；又因$\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$的极小值为$-1$，因此当$2x+\frac{\pi}{3}=(2n+1)\pi+\frac{\pi}{2}$，即$x=\frac{2n+1}{2}\pi+\frac{\pi}{12}$时，$y=3\sin\left(2x+\frac{\pi}{3}\right)$取得极小值$-3$.]

*16. 作$y=1-\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)$的图象，并观察出它的单调区间，极大值和极小值．

*17. 作$y=-\operatorname{tg}\frac{x}{2}$的图象，并和$y=\operatorname{tg}\frac{x}{2}$的图象比较，它们有哪些区别？

*18. 作$y=\sin\pi x$的图象，并求出它的单调区间．

*19. 作$y=1+\sin(2x+1)\pi$的图象，并指出与$y=\sin\pi x$的图象的区别．

*20. 利用图象求适合于$\operatorname{ctg}x=\sin\frac{x}{2}$ $(|x|<2\pi)$的角x（精确到0.1弧度）．

第四章　加法定理和它的推论

§4·1　两角和的正弦和余弦

前面我们学过了含有一个自变量 α 的三角函数. 在实际应用上，我们也常常会遇到含有两个自变量 α, β 的三角函数. 例如 $\sin(\alpha+\beta)$, $\cos(\alpha+\beta)$ 等等.

函数 $\sin(\alpha+\beta)$ 和 $\cos(\alpha+\beta)$ 分别叫做两角 α, β 的和的正弦和余弦.

我们应该注意，两角和的正弦 $\sin(\alpha+\beta)$，一般地与两角的正弦的和 $\sin\alpha+\sin\beta$ 是不相等的. 例如我们知道

$$\sin(60°+30°)=\sin 90°=1.$$

但是 $\sin 60°+\sin 30°=\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}\approx 1.366.$

所以 $$\sin(60°+30°)\neq\sin 60°+\sin 30°.$$

同样地，两角和的余弦 $\cos(\alpha+\beta)$，一般地也并不等于两角的余弦的和. 例如

$$\cos(60°+30°)\neq\cos 60°+\cos 30°.$$

怎样用两个角的三角函数来表示这两个角的和的正弦和余弦呢?

这一节里，我们先就两个角都是锐角，并且它们的和也是锐角的情况来研究.

1. 两角和的正弦　我们来证明，当两个角 α, β 都是锐角，并且它们的和 $\alpha+\beta$ 也是锐角的时候，总有

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

【证】 作 $\angle AOB=\alpha$，并且以它的终边 OB 为始边，再作 $\angle BOC=\beta$，那末 $\angle AOC$ 就等于 $\alpha+\beta$(图 4·1)。

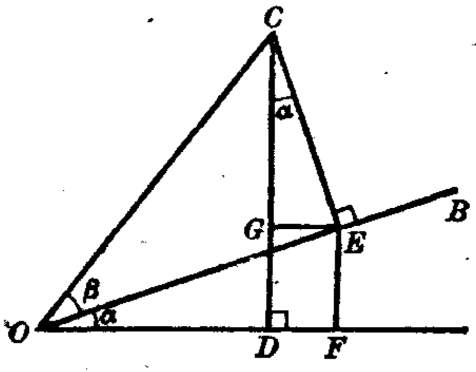


图 4·1

由 C 作 OA 的垂线 DC 和 OB 的垂线 EC。

由 E 作 OA 的垂线 FE 和 DC 的垂线 GE。

因为 $\angle DCE$ 的两边 DC 和 EC 与 $\angle AOB$ 的两边 OA 和 OB 分别垂直，并且这两个角都是锐角，所以

$$\angle DCE=\angle AOB=\alpha.$$

在图中我们看到，

$$\sin(\alpha+\beta)=\frac{DC}{OC}=\frac{DG+GC}{OC}=\frac{FE}{OC}+\frac{GC}{OC}.$$

但在直角三角形 EOF 和 COE 中，

$$\frac{FE}{OE}=\sin\alpha,\quad \frac{OE}{OC}=\cos\beta.$$

因此，
$$\frac{FE}{OC}=\frac{FE}{OE}\cdot\frac{OE}{OC}=\sin\alpha\cos\beta.$$

又在直角三角形 ECG 和 COE 中，

$$\frac{GC}{EC}=\cos\alpha,\quad \frac{EC}{OC}=\sin\beta.$$

因此，
$$\frac{GC}{OC}=\frac{GC}{EC}\cdot\frac{EC}{OC}=\cos\alpha\sin\beta.$$

所以

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.$$

例 1. 求 $\sin 75^\circ$ 的值(精确到 0.001)。

【解】 $\sin 75^\circ=\sin(45^\circ+30^\circ)$

$$=\sin 45^\circ\cos 30^\circ+\cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

$$=\frac{2.449+1.414}{4}=\frac{3.863}{4}=0.966.$$

2. 两角和的余弦 利用图 4·1，我们也很容易证明当 α, β 都是锐角，并且它们的和 $\alpha+\beta$ 也是锐角的时候，总有

$$\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.}$$

【证】 在图 4·1 中，我们可以看到

$$\cos(\alpha+\beta)=\frac{OD}{OC}=\frac{OF-DF}{OC}=\frac{OF}{OC}-\frac{GE}{OC}.$$

但在直角三角形 EOF 和 COE 中，

$$\frac{OF}{OE}=\cos\alpha,\quad \frac{OE}{OC}=\cos\beta.$$

因此，
$$\frac{OF}{OC}=\frac{OF}{OE}\cdot\frac{OE}{OC}=\cos\alpha\cos\beta.$$

又在直角三角形 ECG 和 COE 中，

$$\frac{GE}{EC}=\sin\alpha,\quad \frac{EC}{OC}=\sin\beta.$$

因此，
$$\frac{GE}{OC}=\frac{GE}{EC}\cdot\frac{EC}{OC}=\sin\alpha\sin\beta.$$

所以

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.$$

例 2. 不用查表，求

$$\cos 42^\circ\cos 18^\circ-\sin 42^\circ\sin 18^\circ$$

的值.

【解】 因为 $42^\circ+18^\circ=60^\circ$，我们可以反过来应用两角和的余弦公式，得

$$\cos 42^\circ \cos 18^\circ - \sin 42^\circ \sin 18^\circ = \cos(42^\circ + 18^\circ)$$
$$= \cos 60^\circ = \frac{1}{2}.$$

习 题 4·1

1. 不用查表，求 $\cos 75^\circ$ 的值(精确到 0.001)。

2. 已知 $\sin\theta = \frac{3}{5}$, 且 $0^\circ < \theta < 60^\circ$, 求 $\sin(\theta + 30^\circ)$的值。

3. 已知 $\cos\theta = \frac{12}{13}$, 且 $0^\circ < \theta < 45^\circ$, 求 $\cos(\theta + 45^\circ)$的值。

4. 不用查表，求下列各式的值:

(1) $\sin 13^\circ \cos 17^\circ + \cos 13^\circ \sin 17^\circ$;

(2) $\sin 42^\circ \cos 18^\circ + \cos 42^\circ \sin 162^\circ$;

(3) $\cos^2 15^\circ - \sin^2 15^\circ$;

(4) $\sin 70^\circ \cos 25^\circ - \sin 20^\circ \sin 25^\circ$;

(5) $\sin 40^\circ \sin 20^\circ - \cos 40^\circ \cos 20^\circ$.

5. 已知 $0 < \alpha < \frac{\pi}{4}$, 求 $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\cos\alpha + \cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right)\sin\alpha$ 的值.

6. 已知 $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{5}{13}$, 且 α 和 β 都是小于 45° 的正锐角，求 $\sin(\alpha + \beta)$ 和 $\cos(\alpha + \beta)$的值.

7. 已知 α 是大于 30° 的锐角，且 $\cos(\alpha - 30^\circ) = \frac{15}{17}$, 求 $\cos\alpha$ 的值.

[提示: $\cos\alpha = \cos[(\alpha - 30^\circ) + 30^\circ]$.]

8. 设 α 是小于 45° 的正锐角，求证 $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin(45^\circ + \alpha)$.

§4·2 两角和的正弦公式和余弦公式的一般性

在证明公式

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta \tag{1}$$

和

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta \tag{2}$$

的时候，我们曾假定 α 和 β 都是锐角，并且 $\alpha+\beta$ 也是锐角．事实上，这两个公式对于任何角 α 和 β 都是正确的．

现在我们来证明这个事实．证明的步骤是：首先证明两个公式对于 α 和 β 是 $0°$ 的角或者是任何锐角的时候都能成立；然后再对于 α 和 β 是任意角的情形作出证明．

1．α 和 β 中至少有一个等于 $0°$

这里我们假设 $\beta=0°$．对于公式(1)

$$\text{左边}=\sin(\alpha+\beta)=\sin(\alpha+0°)=\sin\alpha;$$

$$\begin{aligned}\text{右边}&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos 0°+\cos\alpha\sin 0°\\&=\sin\alpha\cdot 1+\cos\alpha\cdot 0\\&=\sin\alpha.\end{aligned}$$

我们看到，左边＝右边．因此，公式(1)能够成立．同样可以证明公式(2)也能够成立．

2．α 和 β 都是锐角，而 $\alpha+\beta$ 是直角

这时，对于公式(1)

$$\text{左边}=\sin(\alpha+\beta)=\sin 90°=1;$$

$$\begin{aligned}\text{右边}&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta\\&=\sin\alpha\cos(90°-\alpha)+\cos\alpha\sin(90°-\alpha)\\&=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1.\end{aligned}$$

我们看到，左边＝右边．因此，公式(1)能够成立．同样可以证明公式(2)也能够成立．

3．α 和 β 都是锐角，而 $\alpha+\beta$ 是钝角

我们命 α 的余角为 α_1，β 的余角为 β_1．那末

$$\alpha=90°-\alpha_1,\ \beta=90°-\beta_1,$$

$$\alpha+\beta=180°-(\alpha_1+\beta_1).$$

因为 α 和 β 是锐角，$\alpha+\beta$ 是钝角，所以 α_1 和 β_1 是锐角，$\alpha_1+\beta_1$ 也是锐角．公式(1)和(2)对于 α_1 和 β_1 是成立的．

这时，

$$\sin\alpha=\sin(90°-\alpha_1)=\cos\alpha_1,$$

$$\cos\alpha=\cos(90°-\alpha_1)=\sin\alpha_1,$$

$$\sin\beta=\sin(90°-\beta_1)=\cos\beta_1,$$

$$\cos\beta=\cos(90°-\beta_1)=\sin\beta_1.$$

因此，
$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin[180°-(\alpha_1+\beta_1)]\\&=\sin(\alpha_1+\beta_1)=\sin\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_1\sin\beta_1\\&=\cos\alpha\sin\beta+\sin\alpha\cos\beta\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos[180°-(\alpha_1+\beta_1)]\\&=-\cos(\alpha_1+\beta_1)\\&=-(\cos\alpha_1\cos\beta_1-\sin\alpha_1\sin\beta_1)\\&=-(\sin\alpha\sin\beta-\cos\alpha\cos\beta)\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

我们看到，公式(1)和(2)也能够成立.

4. α 和 β 是任意正角或负角

我们已经证明公式(1)和(2)对于 α 和 β 是0°的角或者任何锐角的时候都能成立. 现在再设 α 和 β 是任意的正角或者负角. 任意角 θ 总可以写成

$$k\cdot 360°+\theta_1,\ k\cdot 360°+90°+\theta_1,$$
$$k\cdot 360°+180°+\theta_1,\ k\cdot 360°+270°+\theta_1$$

这四种形式中的一种. 这里 k 是一个整数，θ_1 是一个锐角或者0°的角. 例如:

$$653°=360°+270°+23°,$$
$$1260°=3\cdot 360°+180°+0°,$$
$$-585°=-2\cdot 360°+90°+45°.$$

假定 α 和 β 已经分别化成上面四种形式中的一种，我们可以证明公式(1)和(2)能够成立. 例如假设

$$\alpha=m\cdot 360°+270°+\alpha_1,$$
$$\beta=n\cdot 360°+180°+\beta_1,$$

其中 m 和 n 是整数，α_1 和 β_1 是锐角或者0°的角. 这时

$$\begin{aligned}\sin\alpha&=\sin(m\cdot 360°+270°+\alpha_1)\\&=\sin(270°+\alpha_1)=-\cos\alpha_1,\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\cos\alpha&=\cos(m\cdot 360°+270°+\alpha_1)\\&=\cos(270°+\alpha_1)=\sin\alpha_1.\end{aligned}$$

$$\sin\beta=\sin(n\cdot 360^\circ+180^\circ+\beta_1)$$
$$=\sin(180^\circ+\beta_1)=-\sin\beta_1,$$
$$\cos\beta=\cos(n\cdot 360^\circ+180^\circ+\beta_1)$$
$$=\cos(180^\circ+\beta_1)=-\cos\beta_1.$$

因此，

$$\begin{aligned}\sin(\alpha+\beta)&=\sin(m\cdot 360^\circ+270^\circ+\alpha_1+n\cdot 360^\circ+180^\circ+\beta_1)\\&=\sin[(m+n+1)\cdot 360^\circ+90^\circ+(\alpha_1+\beta_1)]\\&=\sin[90^\circ+(\alpha_1+\beta_1)]\\&=\cos(\alpha_1+\beta_1)\\&=\cos\alpha_1\cos\beta_1-\sin\alpha_1\sin\beta_1\\&=(-\sin\alpha)(-\cos\beta)-\cos\alpha(-\sin\beta)\\&=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos(\alpha+\beta)&=\cos(m\cdot 360^\circ+270^\circ+\alpha_1+n\cdot 360^\circ+180^\circ+\beta_1)\\&=\cos[(m+n+1)\cdot 360^\circ+90^\circ+(\alpha_1+\beta_1)]\\&=\cos[90^\circ+(\alpha_1+\beta_1)]\\&=-\sin(\alpha_1+\beta_1)\\&=-(\sin\alpha_1\cos\beta_1+\cos\alpha_1\sin\beta_1)\\&=-[\cos\alpha(-\cos\beta)+(-\sin\alpha)(-\sin\beta)]\\&=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta.\end{aligned}$$

我们看到，在这种情形，公式(1)和(2)也能够成立．当 α 和 β 化成上面所讲的四种形式中的其他形式时，我们同样可以证明公式(1)和(2)能够成立．

这样，我们就证明了不论 α 和 β 是怎样的角，两角和的正弦和余弦公式都能成立．

例 已知 $\sin\alpha=\frac{2}{3}$，$\cos\beta=-\frac{3}{4}$，并且 $90^\circ<\alpha<180^\circ$，$180^\circ<\beta<270^\circ$；求 $\sin(\alpha+\beta)$ 和 $\cos(\alpha+\beta)$ 的值(精确到 0.001)．

【解】 因为 α 的终边在第二象限中，所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{2}{3}\right)^2}=-\frac{\sqrt{5}}{3}.$$

因为 β 的终边在第三象限中，所以

$$\sin\beta=-\sqrt{1-\cos^2\beta}=-\sqrt{1-\left(-\frac{3}{4}\right)^2}=-\frac{\sqrt{7}}{4}.$$

因此，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{2}{3}\left(-\frac{3}{4}\right)+\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{35}}{12}\approx-0.500+0.493$$

$$=-0.007.$$

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

$$=\left(-\frac{\sqrt{5}}{3}\right)\left(-\frac{3}{4}\right)-\frac{2}{3}\left(-\frac{\sqrt{7}}{4}\right)$$

$$=\frac{\sqrt{5}}{4}+\frac{\sqrt{7}}{6}\approx0.559+0.441$$

$$=1.000.$$

习　题　4·2

1．利用两角和的正弦及余弦公式验证诱导公式：

(1) $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$;　　(2) $\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-\cos\alpha$;

(3) $\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\sin\alpha$;　　(4) $\cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha$.

2．利用特殊角的三角函数求 $\sin 105°$ 和 $\cos 105°$ 的值.

3．已知 $\cos(\alpha-\beta)=-\frac{4}{5}$，$\cos(\alpha+\beta)=\frac{4}{5}$，且 $90°<\alpha-\beta<180°$ 和 $270°<\alpha+\beta<360°$，求 $\cos 2\alpha$ 和 $\cos 2\beta$ 的值.

[提示：利用 $\cos 2\alpha=\cos[(\alpha-\beta)+(\alpha+\beta)]$ 和 $\cos(\alpha-\beta)=\cos(\beta-\alpha)$ 的关系可得.]

4．用 α, β 和 γ 的三角函数表示 $\cos(\alpha+\beta+\gamma)$ 和 $\sin(\alpha+\beta+\gamma)$.

[提示：利用 $\cos[(\alpha+\beta)+\gamma]$ 的展开式来求.]

5．设 α 和 β 都是正锐角，求证 $\sin(\alpha+\beta)<\sin\alpha+\sin\beta$.

6．求证 $\cos(\alpha+\beta)\cos\gamma-\cos\alpha\cos(\beta+\gamma)$

$$=\sin(\alpha+\beta)\sin\gamma-\sin\alpha\sin(\beta+\gamma).$$

7．求证 $\cos(\alpha-\beta)\cos(\beta-\gamma)-\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)$

$$=\cos(\alpha-\gamma).$$

§4·3 两角和的正切和余切

当两角和的正切和余切存在的时候，我们也可以用这两个角的三角函数来表示它们的和的正切和余切.

1. 两角和的正切 利用两角和的正弦公式与余弦公式，我们得到

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}.$$

假定 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\beta$ 也都存在，我们还可以把最后分式的分子和分母都除以 $\cos\alpha\cos\beta$，使结果只含 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\beta$. 这样，就得到

$$\begin{aligned}\operatorname{tg}(\alpha+\beta)&=\frac{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}}\\&=\frac{\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}{1-\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\cdot\dfrac{\sin\beta}{\cos\beta}}\\&=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.\end{aligned}$$

就是

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}}.$$

因为两角和的正弦公式和余弦公式是具有一般性的，所以上面的公式在 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$，$\operatorname{tg}\alpha$，$\operatorname{tg}\beta$ 都存在的条件下总能成立. 换句话说，当 $\alpha+\beta$，α 和 β 都不等于 $k\pi+\frac{\pi}{2}$（k 是整数）时，上面的公式都能成立.

2. 两角和的余切 利用两角和的正弦与余弦公式，按

照求两角和的正切的同样方法，我们可以得到

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\cos(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha+\beta)}=\frac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}{\dfrac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\sin\alpha\sin\beta}}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}\cdot\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}-1}{\dfrac{\cos\beta}{\sin\beta}+\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}.$$

就是
$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}.$$

当 $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$ 都存在，也就是当 $\alpha+\beta$, α 和 β 都不等于 $k\pi$（k 是整数）时，这个公式都能成立.

习 题 4·3

1. 利用 30°, 45° 和 60° 的三角函数，求 tg 75°, ctg 105° 的值.

2. 不用查表，求下列各式的值：

(1) $\dfrac{\operatorname{tg}22^\circ+\operatorname{tg}23^\circ}{1-\operatorname{tg}22^\circ\cdot\operatorname{tg}23^\circ}$;　　(2) $\dfrac{1+\operatorname{tg}15^\circ}{1-\operatorname{tg}15^\circ}$;

(3) $\dfrac{\operatorname{ctg}70^\circ\operatorname{ctg}140^\circ-1}{\operatorname{ctg}70^\circ+\operatorname{ctg}140^\circ}$;　　(4) $\dfrac{\operatorname{tg}50^\circ+\operatorname{ctg}20^\circ}{1-\operatorname{ctg}40^\circ\operatorname{tg}70^\circ}$;

(5) $\dfrac{\operatorname{ctg}15^\circ-1}{\operatorname{ctg}15^\circ+1}$.

3. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=2$, $\operatorname{tg}\beta=3$；且 α 和 β 都是正锐角，求证 $\alpha+\beta=135^\circ$.

4. 求证下列各恒等式：

(1) $\dfrac{\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)}=\operatorname{ctg}\alpha$;　　(2) $\dfrac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)$;

(3) $\dfrac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}4\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}4\alpha}=\dfrac{\operatorname{tg}2\alpha+\operatorname{tg}3\alpha}{1-\operatorname{tg}2\alpha\cdot\operatorname{tg}3\alpha}$.

*5. 已知 $\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，求证 $(1+\operatorname{tg}\alpha)(1+\operatorname{tg}\beta)=2$.

6. 求证 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}(\alpha+\beta)\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta$.

*7. 设 $\operatorname{ctg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\beta$ 是$x^2+px+q=0$ 的根，求 $\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)$的值.

8. 求证 $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}$.

9. 求证 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\alpha}$.

§4·4 两角差的三角函数

在§4·2中，我们已经看到，两角和的正弦公式

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y \qquad (1)$$

对于任意角 x 和 y 都能成立. 所以 y 是负角的时候也能成立. 例如在公式(1)中，令 $x=45°$, $y=-30°$; 可得

$$\sin[45°+(-30°)]$$
$$=\sin 45°\cos(-30°)+\cos 45°\sin(-30°),$$

就是

$$\sin(45°-30°)=\sin 45°\cos 30°-\cos 45°\sin 30°.$$

一般地说，在公式(1)中，令 $x=\alpha$, $y=-\beta$, 得

$$\sin[\alpha+(-\beta)]=\sin\alpha\cos(-\beta)+\cos\alpha\sin(-\beta),$$

把两边都化简后，就得到两角差的正弦公式

$$\boldsymbol{\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta}.$$

同样，在公式

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$$

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y},$$

$$\operatorname{ctg}(x+y)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y-1}{\operatorname{ctg}y+\operatorname{ctg}x}$$

中，分别令 $x=\alpha$, $y=-\beta$, 就得到

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos[\alpha+(-\beta)]$$
$$=\cos\alpha\cos(-\beta)-\sin\alpha\sin(-\beta)$$
$$=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\operatorname{tg}[\alpha+(-\beta)]$$
$$=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(-\beta)}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}(-\beta)}=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$
$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\operatorname{ctg}[\alpha+(-\beta)]$$
$$=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}(-\beta)-1}{\operatorname{ctg}(-\beta)+\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{-\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{-\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\alpha}$$
$$=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}.$$

就是 $\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,}$

$$\boldsymbol{\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},}$$
$$\boldsymbol{\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha}.}$$

这些公式对于使它们的两边有意义的角都能成立.

例 1. 求证 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\cos^2\alpha-\sin^2\beta$.

【证】 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$

$$=(\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta)(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)$$
$$=\cos^2\alpha\cos^2\beta-\sin^2\alpha\sin^2\beta$$
$$=\cos^2\alpha(1-\sin^2\beta)-(1-\cos^2\alpha)\sin^2\beta$$
$$=\cos^2\alpha-\cos^2\alpha\sin^2\beta-\sin^2\beta+\cos^2\alpha\sin^2\beta$$
$$=\cos^2\alpha-\sin^2\beta.$$

例 2. 已知 $\cos x=-\frac{12}{13}$, 并且 $\pi<x<\frac{3\pi}{2}$, 求 $\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$的值.

【解】 因为 x 的终边在第三象限内,所以

$$\sin x = -\sqrt{1-\cos^2 x} = -\sqrt{1-\left(-\frac{12}{13}\right)^2} = -\frac{5}{13}.$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{-\frac{12}{13}}{-\frac{5}{13}} = \frac{12}{5}.$$

因此，$$\operatorname{ctg}\left(x-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}+1}{\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4}-\operatorname{ctg} x}$$

$$= \frac{\frac{12}{5}\cdot 1+1}{1-\frac{12}{5}} = -\frac{17}{7}.$$

习　题　4·4

1．利用特殊角的三角函数，求 $\sin 15°$，$\cos 15°$，$\operatorname{tg} 15°$ 的值。

2．不用查表，求下列各式的值：

(1) $\cos(33°-x)\cos(27°+x)-\sin(33°-x)\sin(27°+x)$;

(2) $\cos(80°+2\alpha)\cos(35°+2\alpha)+\sin(80°+2\alpha)\cos(55°-2\alpha)$;

(3) $\sin(70°+\alpha)\cos(10°+\alpha)-\cos(70°+\alpha)\sin(170°-\alpha)$;

(4) $\sin 68°\sin 22°+\cos 112°\sin 428°$;

(5) $\dfrac{\operatorname{tg} 81°-\operatorname{tg} 36°}{1+\operatorname{ctg} 9°\operatorname{ctg} 54°}$;

(6) $\dfrac{\operatorname{ctg} 100°\operatorname{ctg} 10°+1}{\operatorname{tg} 80°+\operatorname{ctg} 80°}$.

3．求证下列各恒等式：

(1) $\sin(30°+\alpha)+\cos(60°+\alpha)=\cos\alpha$;

(2) $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$;

(3) $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cos\beta}{2\sin\alpha\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)}=\operatorname{tg}(\beta-\alpha)$;

(4) $1+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\dfrac{\alpha}{2}=\sec\alpha$;

(5) $\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)}{\sin\alpha}-2\cos(\alpha+\beta)=\dfrac{\sin\beta}{\sin\alpha}$;

(6) $\dfrac{\operatorname{tg}(1+n)x+\operatorname{tg}(1-n)x}{1+\operatorname{tg}(n+1)x\operatorname{tg}(n-1)x}=\operatorname{tg}2x$.

4. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{3}$, $\operatorname{tg}\beta=-2$, 求 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)$ 和 $\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)$.

5. 求证 $\operatorname{tg}\alpha+(1+\operatorname{tg}\alpha)\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=1$.

*6. 一个三角形的两个内角的正切分别是 2 和 3, 求第三个内角.

7. 求证 $\dfrac{\operatorname{tg}(75^\circ+\alpha)-\operatorname{tg}(30^\circ+\alpha)}{1+\operatorname{tg}(75^\circ+\alpha)\operatorname{tg}(30^\circ+\alpha)}$

$=\sin(60^\circ-\alpha)\cos(30^\circ+\alpha)+\cos(60^\circ-\alpha)\sin(30^\circ+\alpha)$.

§4·5 二倍角的三角函数

我们知道, $\sin 2\alpha$ 与 $2\sin\alpha$ 的意义是不同的. $\sin 2\alpha$ 表示角 α 的两倍的正弦, 而 $2\sin\alpha$ 表示角 α 的正弦的两倍. 一般地说, $\sin 2\alpha\neq 2\sin\alpha$. 例如, 当 $\alpha=30^\circ$ 时,

$$\sin 2\alpha=\sin(2\times 30^\circ)=\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2},$$

但

$$2\sin\alpha=2\sin 30^\circ=2\times\frac{1}{2}=1.$$

同样, 2α 的其他三角函数一般也不等于 α 的同名三角函数的两倍.

我们现在来导出用 α 的三角函数表示 2α 的三角函数的公式.

1. 二倍角的正弦 在两角和的正弦公式

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$$

中, 用 α 代替 x 和 y, 得

$$\sin(\alpha+\alpha)=\sin\alpha\cos\alpha+\cos\alpha\sin\alpha,$$

就是 $$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha.$$

2. 二倍角的余弦 在两角和的余弦公式

$$\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$$

中，用 α 代替 x 和 y，得

$$\cos(\alpha+\alpha)=\cos\alpha\cos\alpha-\sin\alpha\sin\alpha,$$

就是 $$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha.$$

因为 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，所以 $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$，代入上式得到

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha.$$

或者用 $\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ 代替 $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha$ 中的 $\sin^2\alpha$，又得到

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1.$$

因此，二倍角的余弦可以写成三种形式. 后面两种形式用起来比较方便，因为只要知道单角的一个函数便已足够了.

3. 二倍角的正切和余切 同样，在两角和的正切公式与余切公式

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y}$$

和 $$\operatorname{ctg}(x+y)=\frac{\operatorname{ctg}x\operatorname{ctg}y-1}{\operatorname{ctg}y+\operatorname{ctg}x}$$

中，分别令 $x=y=\alpha$，化简后，得

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}.$$

例 1. 已知 $\sin\alpha=0.8$,并且 α 的终边在第二象限内,求 $\sin 2\alpha$ 和 $\cos 2\alpha$ 的值.

【解】 因为 α 的终边在第二象限内,所以

$$\cos\alpha=-\sqrt{1-\sin^2\alpha}=-\sqrt{1-0.8^2}=-0.6.$$

因此,

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\times0.8(-0.6)=-0.96;$$

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha=1-2\times0.8^2=1-1.28=-0.28.$$

例 2. 设 $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}=t$, 求证:

(1) $\sin\theta=\dfrac{2t}{1+t^2}$; (2) $\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$;

(3) $\operatorname{tg}\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$.

【证】 (1) $\sin\theta=\sin\left(2\cdot\dfrac{\theta}{2}\right)=2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}$

$$=\frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\dfrac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}=\frac{2t}{1+t^2}.$$

(2) $\cos\theta=\cos\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right)=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}$

$$=\frac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}{\dfrac{\cos^2\frac{\theta}{2}+\sin^2\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}}}$$

$$=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-t^2}{1+t^2}.$$

(3) $\operatorname{tg}\theta=\operatorname{tg}\left(2\cdot\frac{\theta}{2}\right)=\dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}}=\dfrac{2t}{1-t^2}.$

在这个例题里，我们看到，如果令 $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=t$，那末 $\sin\theta$，$\cos\theta$ 和 $\operatorname{tg}\theta$ 都可以表示成关于 t 的分式．这种变形，在高等数学里很有用处．它们叫做**万能代换**．

我们还要注意，从二倍角的余弦公式

$$\cos 2\alpha=1-2\sin^2\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=2\cos^2\alpha-1,$$

分别可以推得

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2},$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}.$$

这两个恒等式也是很有用的.

例 3. 求证 $2\sin^2\theta\sin^2\varphi+2\cos^2\theta\cos^2\varphi$

$$=1+\cos 2\theta\cos 2\varphi.$$

【证】 $2\sin^2\theta\sin^2\varphi+2\cos^2\theta\cos^2\varphi$

$$=2\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}\cdot\frac{1-\cos 2\varphi}{2}$$

$$+2\cdot\frac{1+\cos 2\theta}{2}\cdot\frac{1+\cos 2\varphi}{2}$$

$$=\frac{1}{2}(1-\cos 2\theta-\cos 2\varphi+\cos 2\theta\cos 2\varphi)$$

$$+\frac{1}{2}(1+\cos 2\theta+\cos 2\varphi+\cos 2\theta\cos 2\varphi)$$

$$=1+\cos 2\theta\cos 2\varphi.$$

例 4. 分别用 $\sin\alpha$, $\cos\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\alpha$ 来表示 $\sin 3\alpha$, $\cos 3\alpha$ 和 $\operatorname{tg} 3\alpha$.

【解】 $\sin 3\alpha=\sin(2\alpha+\alpha)$

$$=\sin 2\alpha\cos\alpha+\cos 2\alpha\sin\alpha$$

$$=2\sin\alpha\cos^2\alpha+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$=2\sin\alpha(1-\sin^2\alpha)+(1-2\sin^2\alpha)\sin\alpha$$

$$=2\sin\alpha-2\sin^3\alpha+\sin\alpha-2\sin^3\alpha$$

$$=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha.$$

$\cos 3\alpha=\cos(2\alpha+\alpha)$

$$=\cos 2\alpha\cos\alpha-\sin 2\alpha\sin\alpha$$

$$=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$=(2\cos^2\alpha-1)\cos\alpha-2(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha$$

$$=2\cos^3\alpha-\cos\alpha-2\cos\alpha+2\cos^3\alpha$$

$$=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} 3\alpha=\operatorname{tg}(2\alpha+\alpha)&=\frac{\operatorname{tg} 2\alpha+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg} 2\alpha\operatorname{tg}\alpha}\\&=\frac{\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}+\operatorname{tg}\alpha}{1-\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}\cdot\operatorname{tg}\alpha}\\&=\frac{2\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\alpha(1-\operatorname{tg}^2\alpha)}{1-\operatorname{tg}^2\alpha-2\operatorname{tg}^2\alpha}\\&=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}.\end{aligned}$$

习 题 4·5

1．设 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，计算下列各式的值：

(1) $\sin 2\alpha$；　(2) $\sin^2\alpha$；　(3) $2\sin\alpha$；

(4) $\frac{1}{2}\sin\alpha$；　(5) $\sin\frac{\alpha}{2}$；　(6) $\sin\alpha^2$.

2．已知 $\cos\alpha=\frac{7}{8}$，$\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，求 $\cos 2\alpha$，$\sin 2\alpha$ 和 $\operatorname{tg} 2\alpha$.

3．已知 $\operatorname{tg}\alpha=-(\sqrt{2}-1)$；求 $\sin 2\alpha$，$\cos 2\alpha$ 和 $\operatorname{tg} 2\alpha$.

[提示：利用万能代换公式.]

4．求证下列各恒等式：

(1) $\operatorname{tg}\theta+\operatorname{ctg}\theta=2\operatorname{cosec} 2\theta$；　(2) $\operatorname{tg}\theta-\operatorname{ctg}\theta=-2\operatorname{ctg} 2\theta$；

(3) $\dfrac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}=\operatorname{tg}\theta$；　(4) $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-\frac{3}{4}\sin^2 2\alpha$；

(5) $\dfrac{1+\sin 2\alpha-\cos 2\alpha}{1+\sin 2\alpha+\cos 2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha$；*(6) $\dfrac{\sec 8\beta-1}{\sec 4\beta-1}=\dfrac{\operatorname{tg} 8\beta}{\operatorname{tg} 2\beta}$.

5．求证 (1) $\cos 4\alpha=1-8\cos^2\alpha+8\cos^4\alpha$；

(2) $\sin 4\alpha=4(\sin\alpha\cos^3\alpha-\cos\alpha\sin^3\alpha)$.

*6．(1) 求证

$$\sqrt{1-\sin 2\alpha}=|\sin\alpha-\cos\alpha|$$

和 $$\sqrt{1+\sin 2\alpha}=|\sin\alpha+\cos\alpha|;$$

[提示：$1-\sin 2\alpha=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha$.]

(2) 当$0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$时，$\alpha$在怎样的范围内$\sqrt{1-\sin 2\alpha}=\sin\alpha-\cos\alpha$？在怎样的范围内$\sqrt{1+\sin 2\alpha}=-(\sin\alpha+\cos\alpha)$？

(3) 利用上两题求$\sin 15°-\cos 15°$和$\sin 112°30'+\cos 112°30'$的值.

7. 已知$\sin\alpha=0.6$，且$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$，求$\sin 3\alpha$，$\cos 3\alpha$和$\operatorname{tg} 3\alpha$的值.

8. 求证下列各恒等式:

(1) $\sin 3A\sin^3 A+\cos 3A\cos^3 A=\cos^3 2A$;

(2) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{2\pi}{3}+\alpha\right)=3\operatorname{tg} 3\alpha$;

(3) $\operatorname{ctg} 3\theta=\frac{\operatorname{ctg}^3\theta-3\operatorname{ctg}\theta}{3\operatorname{ctg}^2\theta-1}$;

(4) $\cos 6\alpha=32\cos^6\alpha-48\cos^4\alpha+18\cos^2\alpha-1$.

9. 已知$\operatorname{tg}\theta=\frac{7}{24}$，求$\cos 2\theta$和$\operatorname{ctg} 3\theta$的值.

§4·6 半角的三角函数

一个角的一半叫做它的半角. 有时我们要用一个角的三角函数来表示它的半角的三角函数. 例如，已知

$$\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{2},$$

要算出$\sin 22°30'$，$\cos 22°30'$，等等. 半角三角函数的公式可以从二倍角的余弦公式推导出来.

在二倍角的余弦公式

$$\cos 2x=1-2\sin^2 x$$

中，令$x=\frac{\alpha}{2}$，那末$2x=\alpha$. 因此，

$$\cos\alpha=1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}.$$

移项，得

$$2\sin^2\frac{\alpha}{2}=1-\cos\alpha,$$

就是

$$\sin^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{2}. \tag{1}$$

$$\therefore\quad \sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}.$$

在二倍角的余弦的另一公式

$$\cos 2x=2\cos^2 x-1$$

中，令 $x=\frac{\alpha}{2}$，那末

$$\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1.$$

移项，得
$$2\cos^2\frac{\alpha}{2}=1+\cos\alpha,$$

就是

$$\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{2}. \tag{2}$$

$$\therefore\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}.$$

把等式(1)的两边分别除以等式(2)的两边，还可以得到

$$\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha},$$

$$\therefore\quad \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}.$$

我们得到了由角 α 的余弦来求 $\frac{\alpha}{2}$ 的正弦，余弦和正切的公式．这些公式只能确定所求的三角函数的绝对值．根号前的符号，决定于角 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的象限．因此，应用这些公式时，应当根据题目的条件，先求出 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的象限，然后决定根号前应取的符号．从下面的例1～例3可以看到，

如果知道角 α 的值或者它所在的范围，那末 $\frac{\alpha}{2}$ 的三角函数值可以唯一确定；但是如果只知道角 α 的终边所在的象限，那末将得到 $\frac{\alpha}{2}$ 的两组三角函数值.

例 1. 求 $\operatorname{tg} 67^\circ 30'$ 的值.

【解】 $67^\circ 30' = \frac{135^\circ}{2}$，并且 $67^\circ 30'$ 的终边在第一象限内，所以

$$\operatorname{tg} 67^\circ 30' = \operatorname{tg}\frac{135^\circ}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos 135^\circ}{1+\cos 135^\circ}}$$

$$= \sqrt{\frac{1-\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}{1+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)}} = \sqrt{\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}}$$

$$= \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{2-1}}$$

$$= \sqrt{2}+1.$$

例 2. 已知 $\cos\alpha = -\frac{15}{17}$，并且 $180^\circ < \alpha < 270^\circ$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$ 和 $\cos\frac{\alpha}{2}$ 的值.

【解】 因为 $180^\circ < \alpha < 270^\circ$，所以 $90^\circ < \frac{\alpha}{2} < 135^\circ$，$\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第二象限内. 因此，

$$\sin\frac{\alpha}{2} = +\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = +\sqrt{\frac{1-\left(-\frac{15}{17}\right)}{2}} = +\frac{4\sqrt{17}}{17};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = -\sqrt{\frac{1+\left(-\frac{15}{17}\right)}{2}} = -\frac{\sqrt{17}}{17}.$$

例 3. 已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$, 并且 α 的终边在第四象限内，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$, $\cos\frac{\alpha}{2}$ 和 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 的值.

【解】 终边在第四象限内的角 α 可以写成

$$n\cdot 360^\circ+270^\circ+\alpha_1$$

的形式，这里 n 是一个整数，α_1 是一个锐角. 因此，

$$\frac{\alpha}{2}=n\cdot 180^\circ+135^\circ+\frac{\alpha_1}{2}.$$

因为 α_1 是锐角，所以 $\frac{\alpha_1}{2}$ 是小于 45° 的锐角，$135^\circ+\frac{\alpha_1}{2}$ 是在 135° 与 180° 之间的角，并且容易看出：

当 n 是偶数时，$\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第二象限内；

当 n 是奇数时，$\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第四象限内.

(1) 当 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第二象限内时，

$$\sin\frac{\alpha}{2}>0,\ \cos\frac{\alpha}{2}<0,\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<0.$$

应用公式，得到

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=\frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=-\frac{2\sqrt{5}}{5};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}}=-\frac{1}{2}.$$

(2) 当 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边在第四象限内时，

$$\sin\frac{\alpha}{2}<0,\ \cos\frac{\alpha}{2}>0,\ \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}<0.$$

应用公式，得到

$$\sin\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{2}}=-\frac{\sqrt{5}}{5};$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2\sqrt{5}}{5};$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=-\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}}=-\frac{1}{2}.$$

$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 也可以用 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的不带根号的式子来表示.

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}.$$

就是

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}. \tag{3}$$

同样，$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

就是

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}. \tag{4}$$

应用这两个公式时，只要知道角 α 的终边所在的象限，可不必先分析 $\frac{\alpha}{2}$ 的终边所在的象限，就求出 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ 的值.

例如，在例 3 里，已知 $\cos\alpha=\frac{3}{5}$，并且 α 的终边在第四象限内．我们先算出 $\sin\alpha$ 的值．

因为角 α 的终边在第四象限内，所以 $\sin\alpha<0$．因此，

$$\sin\alpha=-\sqrt{1-\cos^2\alpha}=-\sqrt{1-\left(\frac{3}{5}\right)^2}=-\frac{4}{5}.$$

应用公式 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$，得到

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\frac{3}{5}}{-\frac{4}{5}}=-\frac{1}{2}.$$

我们看到，这样计算就比较方便．

公式(3)和(4)不仅可以根据 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的值，用来求 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$，在化简三角函数式或者证明三角恒等式的时候，也很有用．

例 4. 化简：$\dfrac{1+\sin\theta-\cos\theta}{1+\sin\theta+\cos\theta}$．

【解】 原式 $=\dfrac{\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}+1}{\dfrac{1+\cos\theta}{\sin\theta}+1}=\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}+1}{\dfrac{1}{\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}+1}=\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$．

习　题　4·6

1．已知 $\cos\alpha=\frac{119}{169}$，求 $\sin\frac{\alpha}{2}$，$\cos\frac{\alpha}{2}$ 和 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$．

2．已知 $\cos\alpha=\frac{4}{5}$，且 $\frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$，求 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$．

3．已知等腰三角形顶角的余弦等于 $\frac{7}{25}$，求底角的正弦和余弦．

4. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\frac{4}{3}$，且 $180°<\alpha<270°$，求 $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

5. 求证下列各恒等式:

(1) $\dfrac{\cos A}{\operatorname{ctg}\frac{A}{2}-\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=\frac{1}{2}\sin A$;　(2) $1+\sin\alpha=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;

(3) $1-\sin\alpha=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$;　(4) $\dfrac{2\sin\theta-\sin 2\theta}{2\sin\theta+\sin 2\theta}=\operatorname{tg}^2\frac{\theta}{2}$;

(5) $\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}+\dfrac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}=\operatorname{tg}\alpha$.

6. 利用 45°，30° 的三角函数值，求 $\cos 22°30'$，$\sin 22°30'$，$\cos 15°$，$\sin 15°$ 的值.

*7. 求证 $\operatorname{tg}7°30'=\sqrt{6}-\sqrt{3}+\sqrt{2}-2$.

§4·7　三角函数的积化为和

在有些关于三角函数的计算和化简的问题中，我们需要把三角函数的积化成三角函数的代数和的形式.

我们知道:

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta.$$

把这两个等式的两边分别相加或者相减，得

$$\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta,$$

$$\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\sin\beta.$$

把最后这两个等式的两边都除以 2，并且调过来写，得到

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],\qquad(1)$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)].\qquad(2)$$

例 1. 计算 $\sin 105^\circ \cos 75^\circ$ 的值.

【解】 应用公式(1),得

$$\sin 105^\circ \cos 75^\circ = \frac{1}{2}[\sin(105^\circ+75^\circ)+\sin(105^\circ-75^\circ)]$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 180^\circ+\sin 30^\circ)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

也可以应用公式(2),得

$$\cos 75^\circ \sin 105^\circ = \frac{1}{2}[\sin(75^\circ+105^\circ)-\sin(75^\circ-105^\circ)]$$
$$=\frac{1}{2}[\sin 180^\circ-\sin(-30^\circ)]$$
$$=\frac{1}{2}(\sin 180^\circ+\sin 30^\circ)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}.$$

从这个例题可以看到,公式(1)和(2)的作用是一样的.它们都可以用来把正弦与余弦的积化成另外两个角的正弦的代数和的形式.

相仿地,可以推出把两个角的正弦的积或者余弦的积化成三角函数的代数和的公式.

根据公式

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta,$$
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta;$$

可以得到

$$\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)=2\cos\alpha\cos\beta,$$
$$\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)=-2\sin\alpha\sin\beta,$$

因此,

$$\boldsymbol{\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],} \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].} \qquad (4)$$

注意公式(4)前面的系数是$-\frac{1}{2}$. 这个公式也可以写成另一种形式:

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]. \tag{4'}$$

例 2. 化简 $\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)$
$-\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)$
$+\cos(\alpha+\gamma)\cos(\alpha-\gamma)$.

【解】 应用公式(3),得

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\beta),$$

$$-\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)=-\frac{1}{2}(\cos 2\beta+\cos 2\gamma),$$

$$\cos(\alpha+\gamma)\cos(\alpha-\gamma)=\frac{1}{2}(\cos 2\alpha+\cos 2\gamma).$$

把这三个等式的两边分别相加,就得到

$$\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta)-\cos(\beta+\gamma)\cos(\beta-\gamma)$$
$$+\cos(\alpha+\gamma)\cos(\alpha-\gamma)=\cos 2\alpha.$$

例 3. 求证 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)=\sin^2\alpha-\sin^2\beta$.

【证】 应用公式(4'),得

$$\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)$$
$$=\frac{1}{2}\{\cos[(\alpha+\beta)-(\alpha-\beta)]-\cos[(\alpha+\beta)+(\alpha-\beta)]\}$$
$$=\frac{1}{2}(\cos 2\beta-\cos 2\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}[(1-2\sin^2\beta)-(1-2\sin^2\alpha)]$$
$$=\sin^2\alpha-\sin^2\beta.$$

习 题 4·7

1. 不用查表，计算下列各式的值:

(1) $\sin 52°30' \cos 7°30'$;　　(2) $\cos 97°30' \sin 37°30'$;

(3) $2\cos 165° \cos 135°$.

2. 以和或差表示下列各式:

(1) $2\sin 3\theta \cos\theta$;　　(2) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-3x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$;

(3) $\cos\left(\frac{3\pi}{4}+2x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)$;　(4) $2\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}+x\right)$.

3. 求证 $\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta)+\sin(\beta+\gamma)\sin(\beta-\gamma)+\sin(\gamma+\alpha)\sin(\gamma-\alpha)=0$.

*4. 求证 $\dfrac{\sin\alpha}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\dfrac{\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)\sin(\beta-\gamma)}+\dfrac{\sin\gamma}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=0$.

[提示：取公分母为 $\sin(\alpha-\beta)\sin(\beta-\gamma)\sin(\gamma-\alpha)$.]

5. 求证 $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)+\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\dfrac{2\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha+\cos 2\beta}$.

6. 求证 $\operatorname{ctg}(A+15°)-\operatorname{tg}(A-15°)=\dfrac{4\cos 2A}{1+2\sin 2A}$.

7. 求证 $\operatorname{tg} 67°30'-\operatorname{tg} 22°30'=2$.

§4·8 三角函数的和化为积

有时我们也需要把三角函数的代数和化成积的形式．现在我们先来求出把 $\sin\alpha\pm\sin\beta$ 与 $\cos\alpha\pm\cos\beta$ 化成积的公式.

我们从§4·7中知道:

$$\sin(x+y)+\sin(x-y)=2\sin x\cos y;$$

$$\sin(x+y)-\sin(x-y)=2\cos x\sin y;$$

$$\cos(x+y)+\cos(x-y)=2\cos x\cos y;$$

$$\cos(x+y)-\cos(x-y)=-2\sin x\sin y.$$

令 $x+y=\alpha$, $x-y=\beta$. 解这个方程组，得 $x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$, $y=\dfrac{\alpha-\beta}{2}$. 代入上面的四个等式中，就得到

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\tag{1}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2};\tag{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2};\tag{3}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.\tag{4}$$

利用这些公式，可以把两个角的正弦或者余弦的代数和化成另外两个角的三角函数的积.

注意公式(4)中的系数是 -2. 由于

$$-\sin\frac{\alpha-\beta}{2}=\sin\left(-\frac{\alpha-\beta}{2}\right)=\sin\frac{\beta-\alpha}{2},$$

公式(4)也可以写成下面的形式:

$$\cos\alpha-\cos\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}.\tag{4'}$$

例 1. 求证 $\sin(45°+x)-\sin(45°-x)=\sqrt{2}\sin x$.

【证】 $\sin(45°+x)-\sin(45°-x)$

$$=2\cos\frac{(45°+x)+(45°-x)}{2}$$

$$\times\sin\frac{(45°+x)-(45°-x)}{2}$$

$$=2\cos 45°\sin x=2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x=\sqrt{2}\sin x.$$

除了应用公式(1)～(4)可以把两个角的正弦或者余弦的代数和化成积以外，其他两个同名函数的代数和也很容易化

成积的形式．这些就不必作为公式来记忆了．我们只举一些例子说明如下：

例 2． 把 $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta$ 化成积的形式．

【解】 $$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}+\frac{\sin\beta}{\cos\beta}$$
$$=\frac{\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta}{\cos\alpha\cos\beta}$$
$$=\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

象 $a+b\sin\alpha$, $a+b\cos\alpha$, $a+b\operatorname{tg}\alpha$ 等形式的式子可以利用辅助角把它们化成积的形式．

例 3． 把 $1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha$ 化成积的形式．

【解】 $$1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}+\operatorname{tg}\alpha\right)$$
$$=\sqrt{3}(\operatorname{tg}30^\circ+\operatorname{tg}\alpha).$$

利用例 2 的结果，得

$$\operatorname{tg}(30^\circ+\operatorname{tg}\alpha)=\frac{\sin(30^\circ+\alpha)}{\cos30^\circ\cos\alpha}.$$

因此，

$$1+\sqrt{3}\operatorname{tg}\alpha=\sqrt{3}\cdot\frac{\sin(30^\circ+\alpha)}{\cos30^\circ\cos\alpha}=\sqrt{3}\cdot\frac{\sin(30^\circ+\alpha)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha}$$
$$=\frac{2\sin(30^\circ+\alpha)}{\cos\alpha}.$$

例 4． 把 $1+\sin\alpha$ 化成积的形式．

【解】 $$1+\sin\alpha=\sin 90^\circ+\sin\alpha$$
$$=2\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

这个例题也可以应用二倍角的余弦公式，按照下面的方法来做：

$$1+\sin\alpha=1+\cos(90^\circ-\alpha)$$
$$=1+2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)-1=2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

两个结果的形式虽然不同，其实是一样的；因为

$$2\sin\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)$$
$$=2\cos\left[90^\circ-\left(45^\circ+\frac{\alpha}{2}\right)\right]\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos^2\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right).$$

当两个角的函数互为余函数，而要把它们化成积的形式时，可以仿照下面的例5和例6来做.

例5. 把 $\sin\alpha+\cos\beta$ 化成积的形式.

【解】 $\sin\alpha+\cos\beta=\sin\alpha+\sin(90^\circ-\beta)$

$$=2\sin\frac{\alpha+(90^\circ-\beta)}{2}$$
$$\times\cos\frac{\alpha-(90^\circ-\beta)}{2}$$
$$=2\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}+45^\circ\right)$$
$$\times\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-45^\circ\right).$$

例6. 把 $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta$ 化成积的形式.

【解】 $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(90^\circ-\beta)$.

利用例2的结果，得

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}(90^\circ-\beta)=\frac{\sin(\alpha+90^\circ-\beta)}{\cos\alpha\cos(90^\circ-\beta)}=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}.$$

因此，

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta=\frac{\cos(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\sin\beta}.$$

遇到要把三个同名函数的代数和化成积的时候，要适当选择某两个函数，先把它们的和化成积，不要盲目乱套公式.

例7. 把 $\sin 40^\circ+\sin 50^\circ+\sin 60^\circ$ 化成积的形式.

【解】 $\sin 40°+\sin 50°+\sin 60°$

$$=(\sin 60°+\sin 40°)+\sin 50°$$

$$=2\sin 50°\cos 10°+\sin 50°$$

$$=2\sin 50°\left(\cos 10°+\frac{1}{2}\right)$$

$$=2\sin 50°(\cos 10°+\cos 60°)$$

$$=2\sin 50°\cdot 2\cos 35°\cos 25°$$

$$=4\sin 50°\cos 35°\cos 25°.$$

这里，我们先把 $\sin 60°+\sin 40°$ 化成积，是因为 $60°$ 和 $40°$ 这两个角的和的一半等于 $50°$，恰巧就是题目中的第三个角.

一般地说，如果题目中的两个角的和或者和的一半，差或者差的一半等于第三个角，那末总应先把这两个角的函数的代数和化成积，然后继续做下去.

三角函数的形式是多种多样的．要把某一个和化成积的形式，除了上面例题中所作的指示以外，并没有一定的方法，应该根据具体题目灵活处理.

例 8. 把 $1+\operatorname{tg} x+\sec x$ 化成积的形式.

【解】 $1+\operatorname{tg} x+\sec x$

$$=\frac{\cos x+\sin x+1}{\cos x}$$

$$=\frac{2\cos^2\frac{x}{2}-1+2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}+1}{\cos x}$$

$$=\frac{2\cos\frac{x}{2}\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)}{\cos x}$$

$$=\frac{2\cos\frac{x}{2}\left[\sin\left(90°-\frac{x}{2}\right)+\sin\frac{x}{2}\right]}{\cos x}$$

$$=\frac{2\cos\frac{x}{2}\cdot 2\sin 45^\circ\cos\left(45^\circ-\frac{x}{2}\right)}{\cos x}$$

$$=\frac{2\sqrt{2}\cos\frac{x}{2}\cos\left(45^\circ-\frac{x}{2}\right)}{\cos x}.$$

习　题　4·8

1．将下列各式化成积的形式:

(1) $\cos 6\theta-\cos 4\theta$;　　(2) $\cos 4\theta\cos\theta-\sin 6\theta\sin 3\theta$;

(3) $1+\sin\alpha+\cos\alpha$;　　(4) $\sin\theta+\sin 2\theta+\sin 3\theta$;

(5) $\sin 70^\circ+8\cos 20^\circ\cos 40^\circ\cos 80^\circ$;

(6) $\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos(\alpha+\beta+\gamma)$.

2．将下列各式化成积的形式:

(1) $3-\operatorname{ctg}^2\alpha$;　(2) $1+\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{tg}\beta$;　(3) $\sec x-\operatorname{tg}x$;

(4) $\sin(\alpha+\beta)-\dfrac{\sin(2\alpha+\beta)-\sin\beta}{2\cos\alpha}$;

(5) $1+\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{cosec}\alpha$.

3．化简下列各式:

(1) $\dfrac{\cos A-\cos 3A}{\sin 3A-\sin A}$;　　(2) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}$;

(3) $\dfrac{\sin x+\sin 3x+\sin 5x}{\cos x+\cos 3x+\cos 5x}$;　(4) $\dfrac{\sin A+2\sin 3A+\sin 5A}{\sin 3A+2\sin 5A+\sin 7A}$;

(5) $\dfrac{\sin\theta+\sin 2\theta}{1+\cos\theta+\cos 2\theta}$.

4．求下列各式的值:

(1) $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$;　　(2) $\sin 10^\circ+\sin 50^\circ-\sin 70^\circ$;

(3) $\cos 114^\circ+\sin 24^\circ$;　*(4) $\cos\dfrac{2\pi}{15}\cos\dfrac{4\pi}{15}\cos\dfrac{8\pi}{15}\cos\dfrac{14\pi}{15}$.

5．求证 $\cos(60^\circ+\alpha)+\cos(60^\circ-\alpha)=\cos\alpha$.

6．求证 $\cos 10\alpha+\cos 8\alpha+3\cos 4\alpha+3\cos 2\alpha=8\cos\alpha\cos^3 3\alpha$.

7．求证 $\dfrac{\sin(n+1)A+2\sin nA+\sin(n-1)A}{\cos(n-1)A-\cos(n+1)A}=\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}$.

*8．求证 $\cos 55^\circ \cos 65^\circ + \cos 65^\circ \cos 175^\circ + \cos 55^\circ \cos 175^\circ = -\frac{3}{4}$.

§4·9 化 $a\sin x + b\cos x$ 成一个角的正弦

在物理学中，我们会遇到 $a\sin x + b\cos x$ 这样形式的函数．应用两角和或者差的正弦公式，可以把它化成一个角的正弦的形式．现在举例说明如下：

例1． 化 $\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x$ 成一个角的正弦的形式．

【解】 把 $\sin x$ 的系数提到括号外面，得

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x + \frac{1}{2}\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin x + \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x\right).$$

因为 $\frac{1}{\sqrt{3}} = \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}$，所以

$$\text{原式} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\sin x + \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\cos\frac{\pi}{6}}\cos x\right)$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2\cos\frac{\pi}{6}}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6} + \cos x\sin\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(x + \frac{\pi}{6}\right).$$

例2． 化 $4\sin x + 3\cos x$ 成一个角的正弦的形式．

【解】 原式 $= 4\left(\sin x + \frac{3}{4}\cos x\right)$.

令 $\frac{3}{4} = \operatorname{tg}\varphi$．查表求得 φ 的最小正值

$$\varphi = 36^\circ 52'.$$

因此，

$$\text{原式} = 4(\sin x + \operatorname{tg} 36^\circ 52' \cos x)$$

$$= 4\left(\sin x + \frac{\sin 36^\circ 52'}{\cos 36^\circ 52'}\cos x\right)$$

$$=\frac{4}{\cos 36°52'}(\sin x\cos 36°52'+\cos x\sin 36°52')$$

$$=\frac{4}{\cos 36°52'}\sin(x+36°52').$$

由 $\operatorname{tg} 36°52'=\frac{3}{4}$，得

$$\sec 36°52'=\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 36°52'}=\sqrt{1+\left(\frac{3}{4}\right)^2}=\frac{5}{4},$$

$$\cos 36°52'=\frac{1}{\sec 36°52'}=\frac{1}{\frac{5}{4}}=\frac{4}{5}.$$

$\therefore$ 原式$=\dfrac{4}{\frac{4}{5}}\sin(x+36°52')=5\sin(x+36°52')$.

一般地说，

$$a\sin x+b\cos x=a\left(\sin x+\frac{b}{a}\cos x\right).$$

令 $\frac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi$，那末

$$a\sin x+b\cos x=a(\sin x+\operatorname{tg}\varphi\cos x)$$

$$=\frac{a}{\cos\varphi}(\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi)=\frac{a\sin(x+\varphi)}{\cos\varphi}$$

例 3 画出 $y=3\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图象。

【解】 $y=3\sin x-\sqrt{3}\cos x$

$$=3\left(\sin x-\frac{\sqrt{3}}{3}\cos x\right)$$

$$=3\left(\sin x-\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\cos x\right)$$

$$=\frac{3}{\cos\frac{\pi}{6}}\left(\sin x\cos\frac{\pi}{6}-\cos x\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

$$=2\sqrt{3}\sin\left(x-\frac{\pi}{6}\right).$$

由此可知，要画出 $y=3\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 的图象，只要先画出 $y=2\sqrt{3}\sin x$ 的图象，然后将 y 轴向左平移等于 $\frac{\pi}{6}$ 的一段距离就可

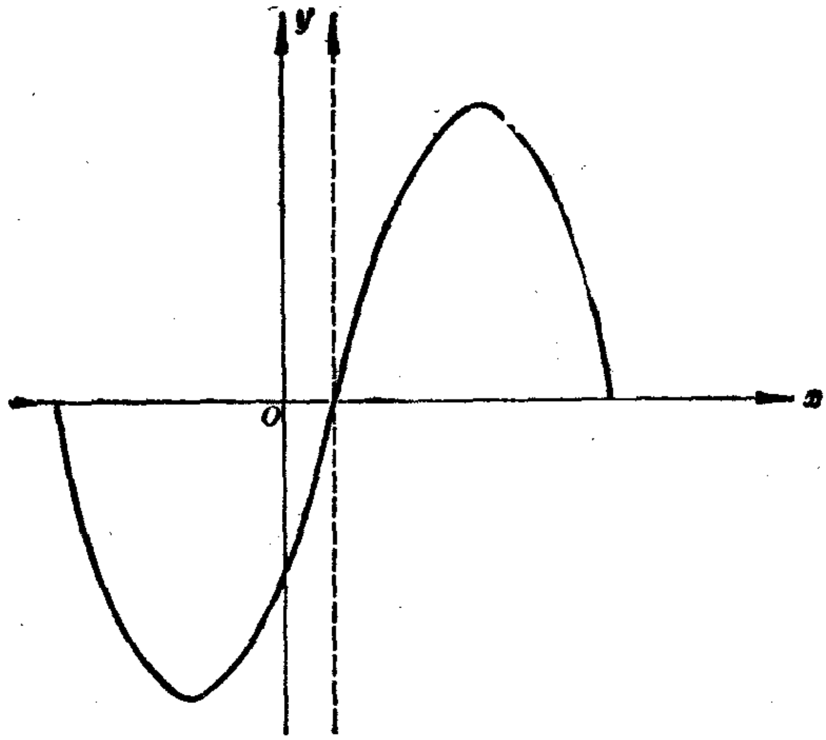


图 4·2

以了(图 4·2)。

习 题 4·9

1. 化 $\sin x+\cos x$ 成一个角的正弦的形式.
2. 化 $\sin x-\sqrt{3}\cos x$ 成一个角的余弦的形式.
3. 化 $\sin(45°+x)-\cos(45°+x)$成一个角的正弦的形式.
4. 化 $\cos(45°-x)+\cos(45°+x)$成一个角的余弦的形式.
5. 化 $8\sin x+15\cos x$ 成一个角的正弦的形式.
6. 求证 $4\sin 53°8'+3\cos 53°8'=5$.
7. 求证 $a\sin x+b\cos x$ 的极大值为$\sqrt{a^2+b^2}$.
8. 画出 $y=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{6}-x\right)+3\sin\left(\frac{\pi}{3}+x\right)$的图象.

§4·10 三角形内角的三角函数间的关系

我们知道，在任意三角形中，三内角的和等于 180°. 应用把三角

函数的和化为积的公式，可以推出三个内角的三角函数间的各种关系．现在举例说明如下：

例1． 在 $\triangle ABC$ 中，求证

$$\sin A+\sin B+\sin C=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

【证】 $\sin A+\sin B+\sin C$

$$=\sin A+\sin B+\sin[180^\circ-(A+B)]$$
$$=\sin A+\sin B+\sin(A+B)$$
$$=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A-B)$$
$$+2\sin\frac{1}{2}(A+B)\cos\frac{1}{2}(A+B)$$
$$=2\sin\frac{1}{2}(A+B)\left[\cos\frac{1}{2}(A+B)+\cos\frac{1}{2}(A-B)\right]$$
$$=2\sin\frac{1}{2}(180^\circ-C)\cdot 2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$
$$=4\sin\left(90^\circ-\frac{C}{2}\right)\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}$$
$$=4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

在这个例题中，我们看到，一开始要把 C 写成 $180^\circ-(A+B)$，后来又把 $A+B$ 写成 $180^\circ-C$．证明这一类等式，一般都可以这样做．

例2． 在 $\triangle ABC$ 中，求证

$$\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C=-1-4\cos A\cos B\cos C.$$

【证】 $\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C$

$$=\cos 2A+\cos 2B+\cos 2[180^\circ-(A+B)]$$
$$=\cos 2A+\cos 2B+\cos[360^\circ-2(A+B)]$$
$$=\cos 2A+\cos 2B+\cos 2(A+B)$$
$$=2\cos(A+B)\cos(A-B)+2\cos^2(A+B)-1$$
$$=-1+2\cos(A+B)[\cos(A+B)+\cos(A-B)]$$
$$=-1+2\cos(180^\circ-C)\cdot 2\cos A\cos B$$
$$=-1-4\cos A\cos B\cos C.$$

例3． 在 $\triangle ABC$ 中，求证

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=1-2\cos A\cos B\cos C.$$

【证】 $\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C$

$$=\frac{1+\cos 2A}{2}+\frac{1+\cos 2B}{2}+\frac{1+\cos 2C}{2}$$

$$=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(\cos 2A+\cos 2B+\cos 2C).$$

利用例 2 中所证明的关系，得

$$\cos^2 A+\cos^2 B+\cos^2 C=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}(-1-4\cos A\cos B\cos C)$$

$$=1-2\cos A\cos B\cos C.$$

例 4. 在 $\triangle ABC$ 中，求证

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C.$$

【证】 利用 §4·8 例 2 的结果，我们知道

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}.$$

所以

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\frac{\sin(A+B)}{\cos A\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}$$

$$=\frac{\sin C}{\cos A\cos B}+\frac{\sin C}{\cos C}$$

$$=\sin C\cdot\frac{\cos C+\cos A\cos B}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$=\sin C\cdot\frac{-\cos(A+B)+\cos A\cos B}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$=\sin C\cdot\frac{-\cos A\cos B+\sin A\sin B+\cos A\cos B}{\cos A\cos B\cos C}$$

$$=\frac{\sin A\sin B\sin C}{\cos A\cos B\cos C}=\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C.$$

这个例题也可以不先把 $\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B$ 变形，而采用下面的更简便的证法：

因为 $$A+B=180^\circ-C,$$

所以 $$\operatorname{tg}(A+B)=\operatorname{tg}(180^\circ-C),$$

就是 $$\frac{\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B}{1-\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B}=-\operatorname{tg} C.$$

等式的两边都乘以 $1-\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B$，得

$$\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B=-\operatorname{tg} C+\operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C.$$

移项，就得到 $\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C=\operatorname{tg} A \operatorname{tg} B \operatorname{tg} C$.

注意，这个等式对于直角三角形不成立.

习　题　4·10

设 $A+B+C=\pi$, 求证:

1. $\dfrac{\sin 2A+\sin 2B+\sin 2C}{\sin A+\sin B+\sin C}=8\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

2. $\cos A+\cos B+\cos C=1+4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

3. $\sin^2\dfrac{A}{2}+\sin^2\dfrac{B}{2}+\sin^2\dfrac{C}{2}=1-2\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\sin\dfrac{C}{2}$.

4. $\sin\dfrac{A}{2}+\sin\dfrac{B}{2}+\sin\dfrac{C}{2}=1+4\sin\dfrac{\pi-A}{4}\sin\dfrac{\pi-B}{4}\sin\dfrac{\pi-C}{4}$.

5. $\sin A+\sin B-\sin C=4\sin\dfrac{A}{2}\sin\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

6. $\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}+\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}=\operatorname{ctg}\dfrac{A}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{B}{2}\operatorname{ctg}\dfrac{C}{2}$.

7. $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{B}{2}\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{C}{2}\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}=1$.

8. $\sin(B+C-A)+\sin(C+A-B)+\sin(A+B-C)$
   $=4\sin A\sin B\sin C$.

本 章 提 要

1. 重要公式(公式后面括号中注的是公式名称的略号)

(1) $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$; $(S_{\alpha\pm\beta})$

(2) $\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$; $(C_{\alpha\pm\beta})$

(3) $\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\dfrac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$; $(T_{\alpha\pm\beta})$

(4) $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$; $(S_{2\alpha})$

(5) $\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=1-2\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$; $(C_{2\alpha})$

(6) $\operatorname{tg}2\alpha=\dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$; $(T_{2\alpha})$

(7) $\sin\dfrac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$; $(S_{\frac{\alpha}{2}})$

(8) $\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$; $(C_{\frac{\alpha}{2}})$

(9) $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$; $(T_{\frac{\alpha}{2}})$

(10) $\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)]$; (SC)

(11) $\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)]$; (CS)

(12) $\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$; (CC)

(13) $\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)]$; (SS)

(14) $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $(S+S)$

(15) $\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$; $(S-S)$

(16) $\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$; $(C+C)$

(17) $\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$. $(C-C)$

2. 各个公式间的关系

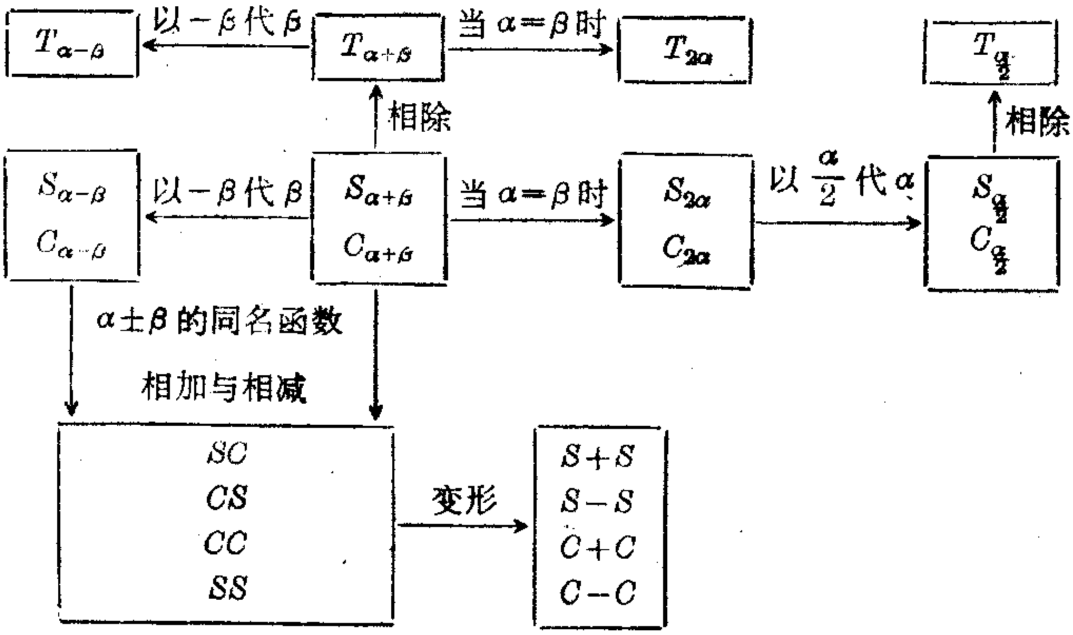


图 4·3

3. $a\sin x+b\cos x$ 的变形 在 $a\sin x+b\cos x$ 中，令 $\dfrac{b}{a}=\operatorname{tg}\varphi$，就得到

$$a\sin x+b\cos x=\frac{a\sin(x+\varphi)}{\cos\varphi}.$$

复 习 题 四

1. 已知 $\cos\theta=\dfrac{5}{11}$，$270°<\theta<360°$，求 $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$ 和 $\operatorname{tg}2\theta$。

2. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{m}{n}$，求 $m\cos2\alpha+n\sin2\alpha$。

3. 已知 $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{1}{7}$，$\operatorname{tg}\beta=\dfrac{1}{2}$，求 $\operatorname{tg}(\beta-2\alpha)$。

4. 设 α, β, γ 都是锐角，它们的正切依次为 $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{1}{8}$；求证

$$\alpha+\beta+\gamma=45°.$$

5. 不用查表，求下列各式的值：

(1) $\sin20°+\sin40°-\sin80°$；

(2) $\cos20°+\cos60°+\cos100°+\cos140°$；

(3) $\cos40°\cos80°\cos160°$。

6. 设 $\sin\alpha+\sin\beta=a$，$\cos\alpha+\cos\beta=b$，求 $\operatorname{tg}\dfrac{\alpha-\beta}{2}$。

7. 在直角三角形 ABC 中，$\angle B=90°$，CD 是 $\angle C$ 的平分线，已知 $AD=b$，$DB=a$，求 BC 的长。

*8. 求证 $\dfrac{1}{2\sin10°}-\dfrac{\sqrt{3}}{2\cos10°}=2$。

$\left[\text{提示：左边}=\dfrac{\sin30°}{\sin10°}-\dfrac{\cos30°}{\cos10°}.\right]$

*9. 已知 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\beta$ 是方程 $x^2+6x+7=0$ 的两个根，求证

$$\sin(\alpha+\beta)=\cos(\alpha+\beta).$$

*10. 已知 $\operatorname{tg}\alpha$ 和 $\operatorname{tg}\beta$ 是方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根，求下式的值：

$$\sin^2(\alpha+\beta)+p\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)+q\cos^2(\alpha+\beta).$$

11. 在一个圆的圆心的同旁作平行的两弦，这二条弦所对的圆心角各为 72° 与 144°．求证这二弦间的距离等于半径的二分之一。

*12. 求证 $\operatorname{tg}6°\operatorname{tg}42°\operatorname{tg}66°\operatorname{tg}78°=1$。

13. 求证

$$\frac{1}{\sin(\alpha-\beta)\sin(\alpha-\gamma)}+\frac{1}{\sin(\beta-\gamma)\sin(\beta-\alpha)}$$

$$+\frac{1}{\sin(\gamma-\alpha)\sin(\gamma-\beta)}=\frac{1}{2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\beta-\gamma}{2}\cos\frac{\gamma-\alpha}{2}}.$$

*14. 求证 $\cos 47°-\cos 61°-\cos 11°+\cos 25°=\sin 7°$.

15. 设 $A+B+C=\pi$, 求证

$$\operatorname{ctg} A \operatorname{ctg} B+\operatorname{ctg} B \operatorname{ctg} C+\operatorname{ctg} C \operatorname{ctg} A=1.$$

*16. 设 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$, 求证

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta+4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\gamma}{2}\cos\frac{\alpha+\delta}{2}=0.$$

*17. 设 $\alpha+\beta+\gamma=0$, 求证

$$2(\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma)(1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)$$
$$=\sin 2\alpha+\sin 2\beta+\sin 2\gamma.$$

18. 设 $A+B+C=\pi$, 求证

$$\sin 4A+\sin 4B+\sin 4C=-4\sin 2A\cdot\sin 2B\cdot\sin 2C.$$

19. 设 $A+B+C=\pi$, 且 $2\sin B\sin C=2\cos^2\frac{A}{2}$, 求证 $\angle B=\angle C$.

20. 设 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, 且 $\sin\alpha=\cos\beta\cos\gamma$, 求证 $\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=1$.

第五章　斜三角形的解法

§5·1　斜三角形解法的分类

在第一章中，我们研究了利用锐角的三角函数解直角三角形的问题．在实际问题中，我们有时也会遇到要解斜三角形(三个角都是锐角的三角形或者有一个角是钝角的三角形)的问题；就是，在斜三角形的六个元素(三个角和三条边)中，根据已经知道的三个元素(其中至少有一个元素是边)，求出其他的三个元素．

解斜三角形的问题，只有下面四种类型：

(1) 已知两个角和一条边，

(2) 已知两条边和其中一条边所对的角，

(3) 已知两条边和它们所夹的角，

(4) 已知三条边．

为了研究解斜三角形这几种类型的问题，我们要在下面各节中导出任意三角形的边与角的三角函数间的关系．

习　题　5·1

1．已知斜三角形的三个角，能解这个三角形吗？为什么？

2．解直角三角形的四种类型能归并在解斜三角形的哪几种类型里？

§5·2 正弦定理

在平面几何中知道，如果一个三角形的两条边不等，那末它们所对的角也不等，大边所对的角较大。现在我们进一步来研究三角形的边长和它们所对的角的大小间究竟有怎样的关系。

下面我们证明，在任意三角形 ABC 中，

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B},$$

这里，a 和 b 分别是 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的对边。

我们可以按照 $\angle A$ 和 $\angle B$ 的大小，分成三种情形来证明：

(1) $\angle A$ 和 $\angle B$ 都是锐角：在图5·1的三角形 ABC 中，作 $CD\perp AB$ 交 AB 于 D。在直角三角形 ACD 中，

$$CD=b\sin A;$$

在直角三角形 BCD 中，

$$CD=a\sin B.$$

因此，$\quad a\sin B=b\sin A,$

就是 $\quad \dfrac{a}{b}=\dfrac{\sin A}{\sin B}.$

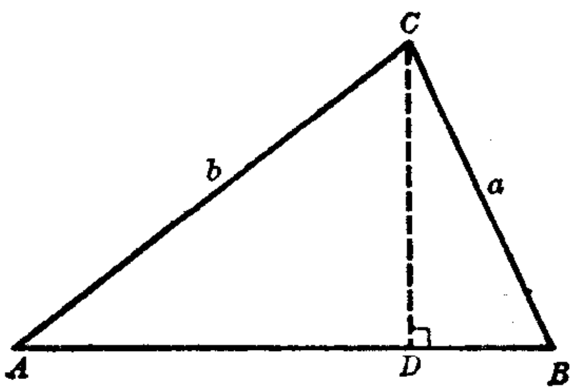


图 5·1

(2) $\angle A$ 和 $\angle B$ 中有一个是直角：假定 $\angle B$ 是直角（图5·2）。在这种情形下，

$$\frac{a}{b}=\sin A,$$

$$\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\sin A}{\sin 90^\circ}=\frac{\sin A}{1}=\sin A.$$

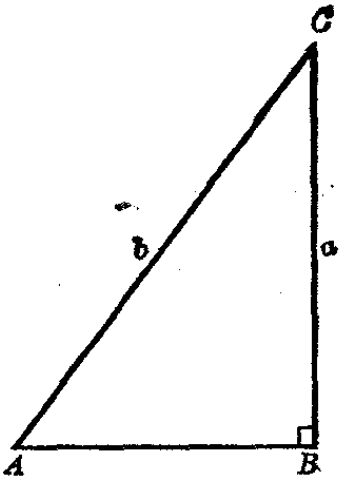


图 5·2

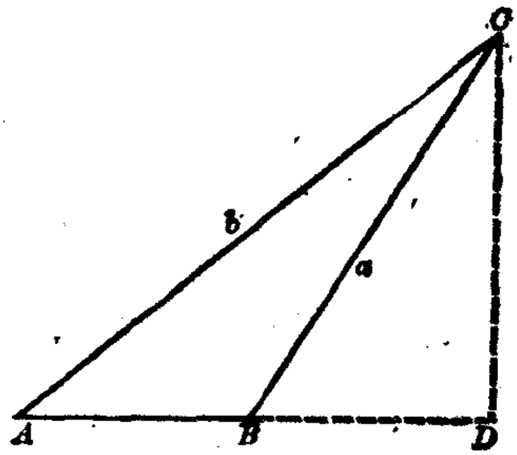


图 5·3

因此，我们也得到

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}.$$

(3) $\angle A$ 和 $\angle B$ 中有一个是钝角：假定 $\angle B$ 是钝角(图 5·3)．作 $CD\perp AB$，交 AB 的延长线于 D．在直角三角形 ACD 中，

$$CD=b\sin A;$$

在直角三角形 BCD 中，

$$CD=a\sin(180^\circ-B)=a\sin B.$$

因此，我们仍得到

$$a\sin B=b\sin A,$$

就是

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B}.$$

上面证明了在各种情况下，三角形两条边的比，都等于它们所对的角的正弦的比．这样，在任意三角形 ABC 中，可以知道

$$\frac{a}{b}=\frac{\sin A}{\sin B},\quad \frac{b}{c}=\frac{\sin B}{\sin C}.$$

把这两个等式改写成

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B},\quad \frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

我们就可以连起来写成

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}.$$

这个结论叫做**正弦定理**．它的每一个等式都表示三角形的两个角和它们的对边之间的关系． 在这四个元素中，知道任意三个，就可以求出另一个未知的元素．

例　在 $\triangle ABC$ 中，求证

$$\frac{a+b}{c}=\frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}};\quad \frac{a-b}{c}=\frac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}.$$

【证】　命 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=k.$

$$\frac{a+b}{c}=\frac{k\sin A+k\sin B}{k\sin C}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin C}$$

$$=\frac{\sin A+\sin B}{\sin[180^\circ-(A+B)]}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin(A+B)}$$

$$=\frac{2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A-B}{2}}{2\sin\dfrac{A+B}{2}\cos\dfrac{A+B}{2}}=\frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{A+B}{2}}$$

$$=\frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{180^\circ-C}{2}}=\frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\cos\left(90^\circ-\dfrac{C}{2}\right)}=\frac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}.$$

第二个等式可以类似地证明(证明留给读者)．这两个等

式通常叫做**模尔外得公式**. 由于它们都含有三角形的三个角和三条边,在解斜三角形求出未知元素后,可以利用它们来进行验算.

习　题　5·2

1. 在 $\triangle ABC$ 中,如果 $\sin A=\sin B$, A 和 B 的关系怎样?为什么?

2. 在 $\triangle ABC$ 中,求证 $a=b\sin A\operatorname{cosec}B$.

3. 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin A$, $\sin B$, $\sin C$的任何一个值能为负数吗?为什么?

4. 在 $\triangle ABC$ 中,求证 $\dfrac{\sin A+\sin B}{\sin C}=\dfrac{a+b}{c}$.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 如果 $\sin^2 A+\sin^2 B=\sin^2 C$, 那末这个三角形一定是直角三角形.

*6. 在 $\triangle ABC$ 中,$\angle A$ 的平分线交 BC 于 D, 试利用正弦定理求证

$$AB:AC=BD:DC.$$

7. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $B=2A$, 求证 $b=2a\cos A$.

8. 在 $\triangle ABC$ 中,若 $B=\dfrac{\pi}{3}$, 求证 $\dfrac{a+c}{2b}=\sin\left(\dfrac{\pi}{6}+C\right)$.

*9. 在 $\triangle ABC$ 中,求证 $\dfrac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)}=\dfrac{a^2-b^2}{c^2}$.

§5·3　已知两角和一边,解斜三角形

已知两个角和一条边, 解斜三角形的问题(就是§5·1中的第一类问题)可以用正弦定理来解. 现在举例说明如下:

例1. 在三角形 ABC 中,已知 $A=105°$, $B=60°$, $b=4$, 解这个三角形.

【解】 这里,已知的是两个角和其中一个角所对的边(图5·4).

(1) $C=180°-(A+B)=180°-(105°+60°)=15°$.

(2) 由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{4\sin 105^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$=\frac{4\times 0.9659}{0.8660}=4.462.$$

(3) 由 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$，得

$$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{4\sin 15^\circ}{\sin 60^\circ}$$

$$=\frac{4\times 0.2588}{0.8660}=1.196.$$

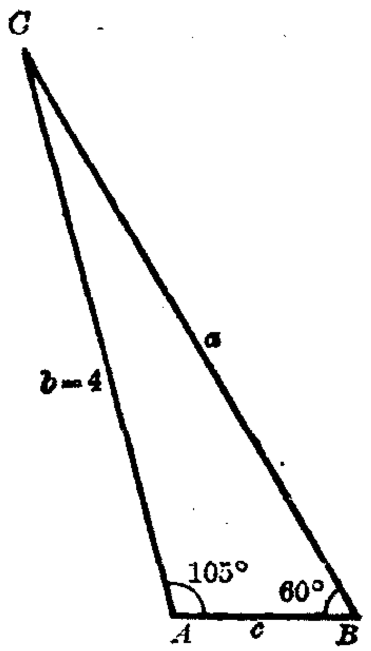


图 5·4

例 2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A=11^\circ 48'$，$C=34^\circ 30'$，$b=13.02$，解这个三角形.

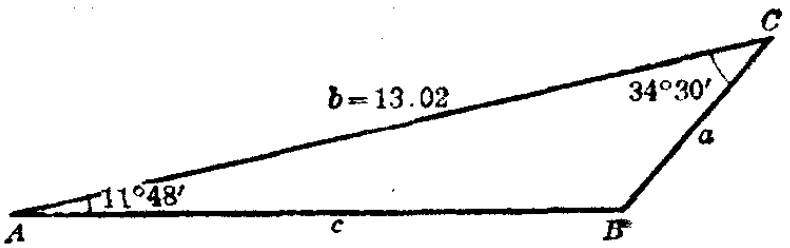


图 5·5

【解】 这里，已知的是两个角和它们所夹的边(图 5·5).

(1) $B=180^\circ-(A+C)=180^\circ-(11^\circ 48'+34^\circ 30')$

$=133^\circ 42'.$

(2) 由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{13.02\sin 11^\circ 48'}{\sin 133^\circ 42'}=\frac{13.02\times 0.2045}{0.7230}$$

$$=\frac{2.6626}{0.7230}=3.683.$$

(3) 由 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}$, 得

$$c=\frac{b\sin C}{\sin B}=\frac{13.02\sin 34°30'}{\sin 133°42'}=\frac{13.02\times 0.5664}{0.7230}$$

$$=\frac{7.3745}{0.7230}=10.20.$$

从上面这两个例题可以知道，已知两角和一边(不论是其中一个已知角所对的边，或者是两个已知角所夹的边)，解这个三角形时，都可以根据 $A+B+C=180°$ 先求出第三个角，然后应用正弦定理把其他两边求出来.

例 3. 要测工厂 A 和河对岸火车站 B 间的距离(图 5·6)，在岸旁选择一点 C，量得 $AC=100$ 米，$\angle BAC=74°$，$\angle BCA=44°$，求 AB 的长(精确到 0.1 米).

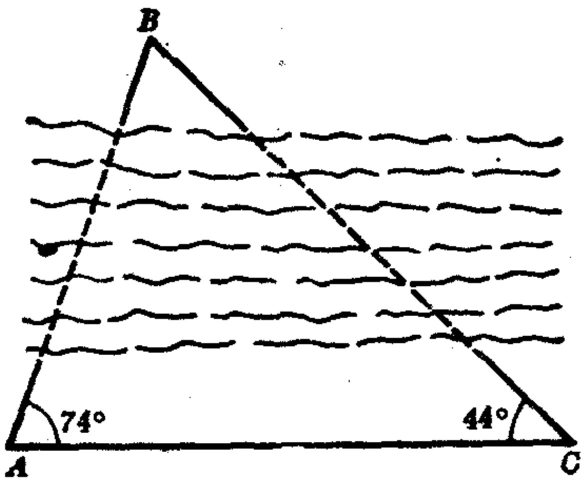


图 5·6

【解】 $\angle ABC=180°-(\angle BAC+\angle BCA)$

$$=180°-(74°+44°)=62°.$$

根据正弦定理，得

$$\frac{AB}{\sin\angle BCA}=\frac{AC}{\sin\angle ABC},$$

$$\therefore \quad AB=\frac{AC\sin\angle BCA}{\sin\angle ABC}=\frac{100\sin 44^\circ}{\sin 62^\circ}$$

$$=\frac{100\times 0.6947}{0.8829}=\frac{69.47}{0.8829}=78.7.$$

答：工厂与火车站间的距离约为 78.7 米。

习　题　5·3

1．解下列各三角形：

(1) $A=65^\circ,\ B=40^\circ,\ a=50$;

(2) $B=100^\circ10',\ C=45^\circ40',\ c=3060$;

(3) $A=50^\circ,\ B=75^\circ,\ c=60$;

(4) $B=48^\circ40',\ C=64^\circ20',\ a=14.5$.

2．在 $\triangle ABC$ 中，$A:B:C=3:4:5$，求 $a:b:c$.

3．三角形的两个内角为 $18^\circ20'$ 与 $11^\circ40'$，最长的边为 1 m，求最短的边长(精确到 0.0001 m)。

4．在 $\triangle ABC$ 中，$A=17^\circ48',\ C=51^\circ8',\ a=287$，求 $\angle B$ 的平分线的长.

5．在 $\triangle ABC$ 中，$B=22^\circ30',\ C=112^\circ30'$，求证 BC 的长为 BC 边上的高的二倍.

6．两船相距 1 km，由各船测岸上一灯塔与他船所张的角各为 $52^\circ25'$ 与 $75^\circ9'$，求灯塔与各船的距离(精确到 0.001 km)。

§5·4　已知两边和其中一边的对角，解斜三角形

在一个三角形中，已知两边和其中一边的对角，例如已知 a, b 和 A，解这个三角形的问题(就是§5·1中的第二类问题)．也可以应用正弦定理来解决.

在研究解法以前，我们先讨论一下，当已知三角形的两边 a, b 和 a 边的对角 A 时，怎样画出 $\triangle ABC$。

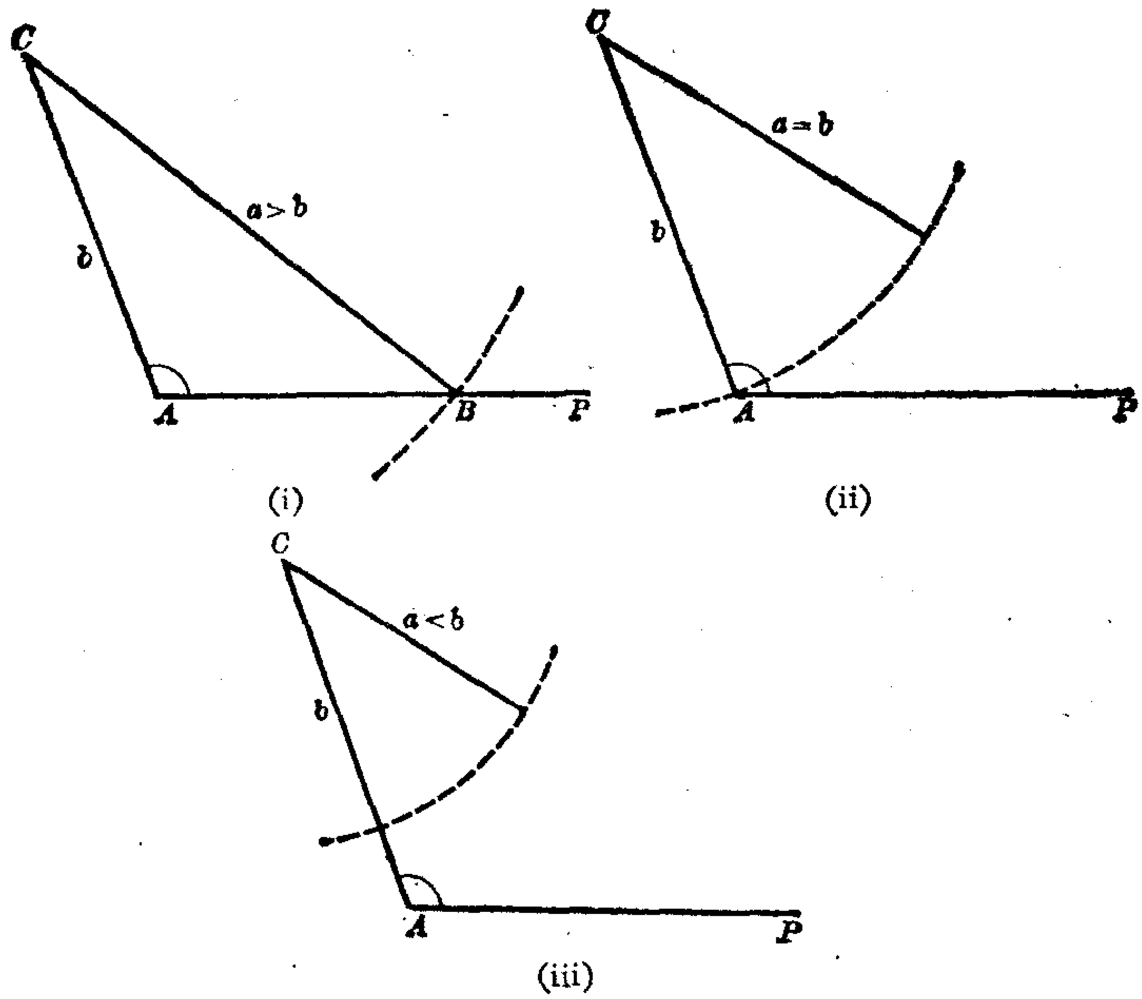


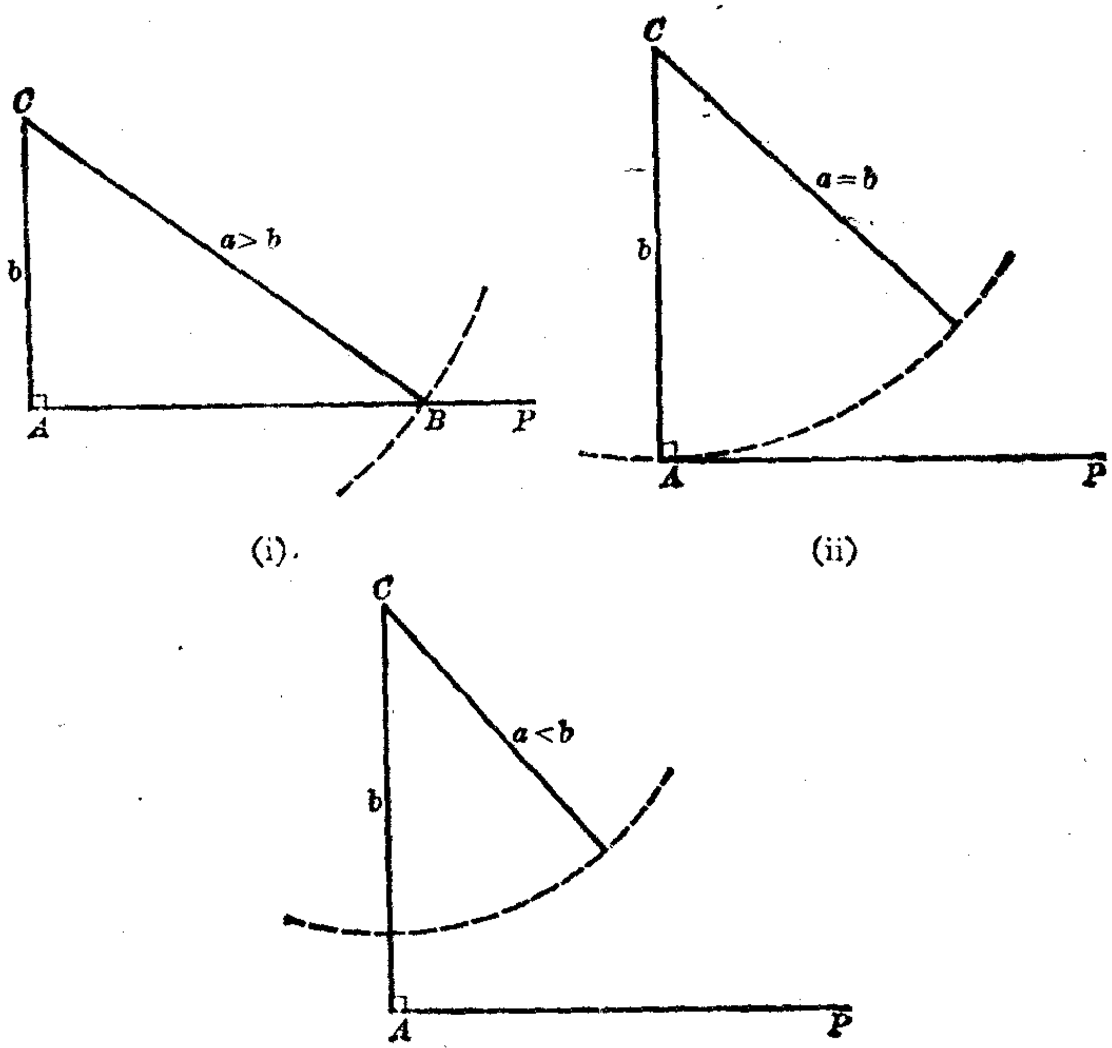
图 5·7

画一条直线 AP(图 5·7)，过点 A 画线段 AC，使 $\angle CAP$ 等于已知角 A，并且使 AC 的长等于 b. 然后要在 AP 上找出另一个顶点 B，使它和顶点 C 间的距离等于 a. 我们可以以 C 为圆心，a 为半径，画弧. 如果这条弧能够和 AP 相交，就可以决定点 B 的位置.

(1) 设 A 是钝角，我们可能遇到下列三种情形：

1) 当 $a>b$ 时，存在一个三角形适合于已知的条件[图 5·7(i)].

2) 当 $a=b$ 时，适合于已知条件的三角形不存在[图 5·7(ii)].



(iii)

图 5·8

3) 当 $a<b$ 时，适合于已知条件的三角形不存在[图 5·7 (iii)].

(2) 设 A 是直角，可能遇到的情形也有三种:

1) 当 $a>b$ 时，存在一个三角形适合于已知的条件[图 5·8 (i)].

2) 当 $a=b$ 时，适合于已知条件的三角形不存在[图 5·8 (ii)].

3) 当 $a<b$ 时，适合于已知条件的三角形不存在[图 5·8 (iii)].

(3) 设 A 是锐角，可能遇到的情形有五种(图5·9)．为了分清楚这五种情形，我们从 C 画 AP 的垂线．这条垂线的长是 $b\sin A$，它小于 b．对于 $a<b$ 的情形，我们再比较 a 与 $b\sin A$．这样，我们就有：

1) 当 $a>b$ 时，存在一个三角形适合于已知的条件[图5·9(i)]．

2) 当 $a=b$ 时，也存在一个三角形适合于已知的条件[图

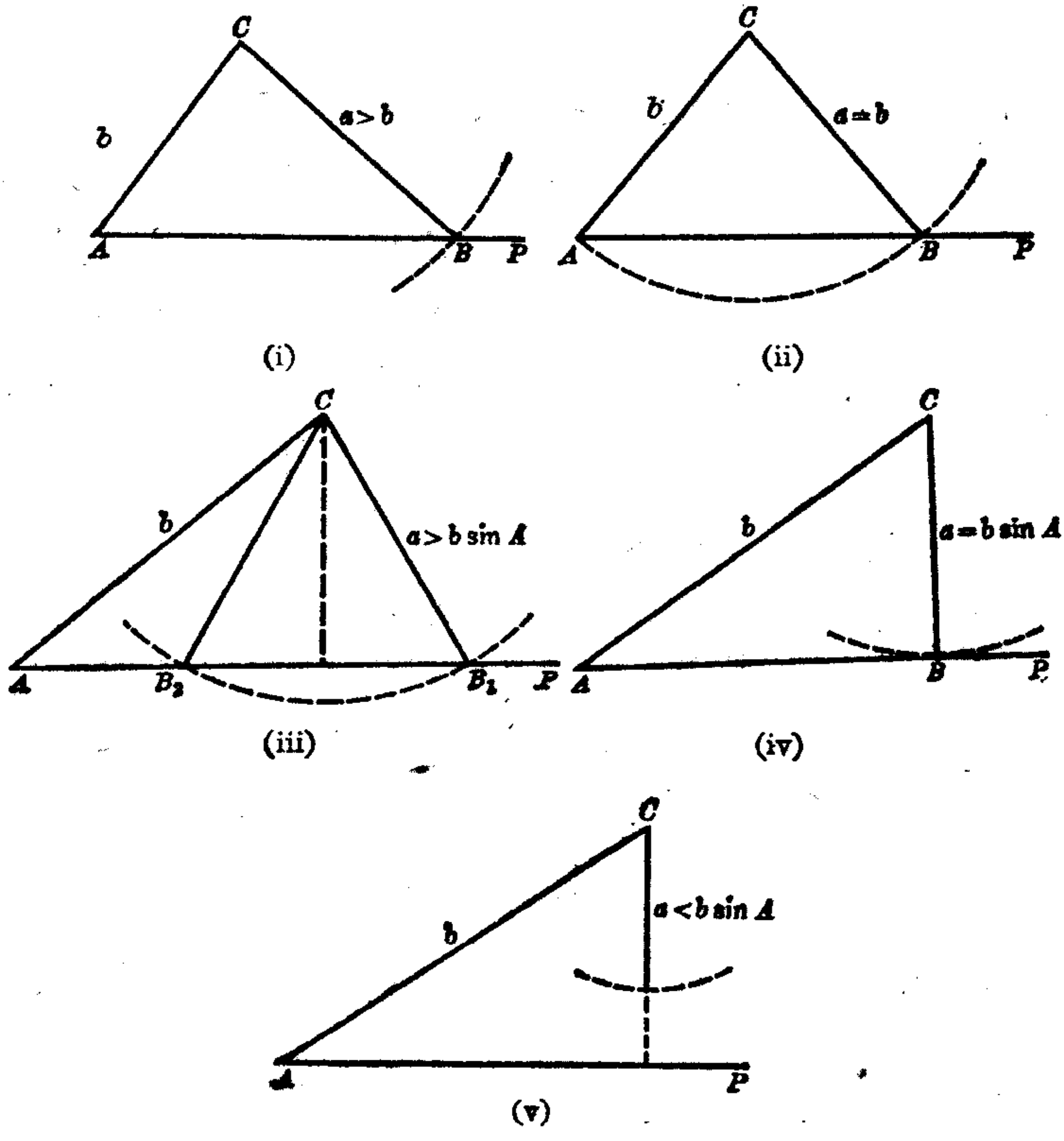


图 5·9

5·9(ii)].

3) 当 $a<b$，但 $a>b\sin A$ 时，存在两个三角形 AB_1C 和 AB_2C 适合于已知的条件，其中 $\angle AB_1C$ 是锐角，$\angle AB_2C$ 是钝角，并且两个角互为补角[图 5·9(iii)].

4) 当 $a<b$，但 $a=b\sin A$ 时，存在一个三角形适合于已知的条件，这个三角形是直角三角形[图 5·9(iv)].

5) 当 $a<b$，并且 $a<b\sin A$ 时，不存在适合于已知条件的三角形[图 5·9(v)].

上面所讨论的结果，可以列成下表：

<table>
<tr><th></th><th>$A>90^\circ$</th><th>$A=90^\circ$</th><th colspan="2">$A<90^\circ$</th></tr>
<tr><td>$a>b$</td><td>一 解</td><td>一 解</td><td colspan="2">一 解</td></tr>
<tr><td>$a=b$</td><td>没有解</td><td>没有解</td><td colspan="2">一 解</td></tr>
<tr><td rowspan="3">$a<b$</td><td rowspan="3">没有解</td><td rowspan="3">没有解</td><td>$a>b\sin A$</td><td>两 解</td></tr>
<tr><td>$a=b\sin A$</td><td>一 解</td></tr>
<tr><td>$a<b\sin A$</td><td>没有解</td></tr>
</table>

当已知两边和其中一边的对角解三角形时，首先应根据已知的元素，画一张草图，决定解的个数.

例 1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知下列条件，这个三角形有没有解？如果有解，有几个解？

(1) $a=16$, $b=20$, $A=106^\circ$;

(2) $a=30$, $b=20$, $A=50^\circ$;

(3) $a=20$, $b=34$, $A=72^\circ$;

(4) $a=18$, $b=22$, $A=35^\circ$.

【解】 (1) 这里，$A>90^\circ$，$a<b$，所以问题没有解.

(2) 这里，$A<90^\circ$，$a=b$，所以问题有一解.

(3) 这里，$A<90°$，$a<b$. 为了决定问题有没有解，我们计算 $b\sin A$，得

$$b\sin A=34\sin 72°=34\times 0.9511=32.33.$$

因为 $a<b\sin A$，所以问题没有解.

(4) 这里，$A<90°$，$a<b$. 但

$$b\sin A=22\sin 35°=22\times 0.5736=12.62.$$

因为 $a>b\sin A$，所以问题有两解.

已知 a，b 和 A，解三角形的问题，如果有解，我们根据正弦定理 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，算出 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$. 当问题有一解时，角 B 取锐角的值（在特殊情况下也可能是直角）. 当问题有两解时，角 B 的一个值是锐角，另一个值是它的补角.

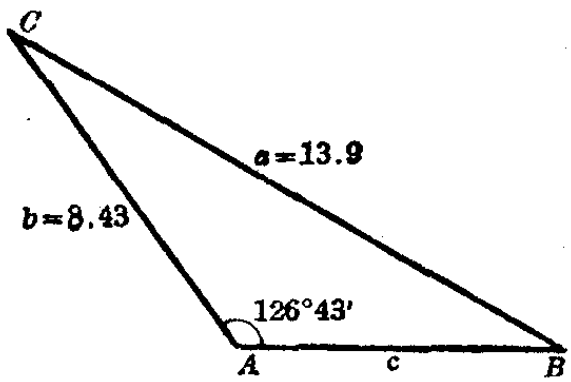


图 5·10

例 2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=13.9$，$b=8.43$，$A=126°43'$，解这个三角形.

【解】 这里，A 是钝角，$a>b$，所以问题有一个解（图 5·10）.

(1) 由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{8.43\sin 126°43'}{13.9}$$

$$=\frac{8.43\times 0.8016}{13.9}=\frac{6.757}{13.9}=0.4861.$$

$$\therefore\quad B=29°5'.$$

(2) $C=180°-(A+B)=180°-(126°43'+29°5')$

$$=24°12'.$$

(3) 由 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$，得

$$c=\frac{a\sin C}{\sin A}=\frac{13.9\sin 24°12'}{\sin 126°43'}=\frac{13.9\times 0.4099}{0.8016}$$

$$=\frac{5.698}{0.8016}=7.108.$$

例 3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=16$，$b=25$，$A=33°15'$，解这个三角形.

【解】 这里，A 是锐角，并且 $a<b$. 我们先计算 $b\sin A$.

$$b\sin A=25\sin 33°15'=25\times 0.5483=13.71.$$

因为 $a>b\sin A$，所以问题有两解(图 5·11).

(1) 由 $\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}$，得

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{25\sin 33°15'}{16}=\frac{25\times 0.5483}{16}$$

$$=\frac{13.71}{16}=0.8568.$$

查正弦表，得

$$B_1=58°57',$$

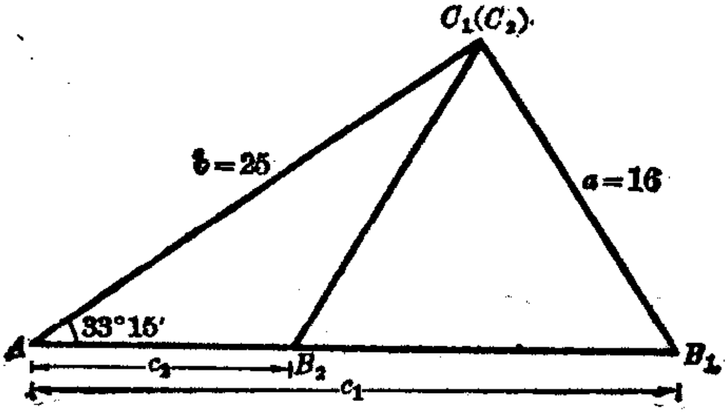


图 5·11

$$B_2=180°-B_1=180°-58°57'=121°3'.$$

(2) $C_1=180°-(A+B_1)=180°-(33°15'+58°57')$

$=87°48'.$

$C_2=180°-(A+B_2)=180°-(33°15'+121°3')$

$=25°42'.$

(3) 由 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$, 得 $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}$.

$$\therefore\quad c_1=\frac{a\sin C_1}{\sin A}=\frac{16\sin 87°48'}{\sin 33°15'}=\frac{16\times 0.9993}{0.5483}$$

$$=\frac{15.99}{0.5483}=29.16.$$

$$c_2=\frac{a\sin C_2}{\sin A}=\frac{16\sin 25°42'}{\sin 33°15'}=\frac{16\times 0.4337}{0.5483}$$

$$=\frac{6.939}{0.5483}=12.66.$$

注意 在A是锐角, $a<b$ 的情形下, 当 $a>b\sin A$ 时, $\dfrac{b\sin A}{a}<1$; 当 $a=b\sin A$ 时, $\dfrac{b\sin A}{a}=1$; 当 $a<b\sin A$ 时, $\dfrac{b\sin A}{a}>1$. 但 $\dfrac{b\sin A}{a}=\sin B$. 因此, 由 $\sin B<1$, $\sin B=1$, $\sin B>1$, 可以决定 $a>b\sin A$, $a=b\sin A$ 或者 $a<b\sin A$, 从而决定问题有两解, 一解或者没有解.

习 题 5·4

1. 在三角形中已知下列条件, 判定它的解的情况:

(1) $a=80$, $b=100$, $A=30°$; (2) $a=50$, $b=100$, $A=30°$;

(3) $a=13$, $b=11$, $A=69°$; (4) $a=40$, $b=100$, $A=30°$;

(5) $a=34$, $b=37$, $A=95°$.

2. 已知 $a=18$, $b=20$, $A=55°24'$, 解这个三角形.

3. 已知 $b=23.37$, $c=19.82$, $B=109°$, 解这个三角形.

4. 已知 $a=134$, $b=84$, $B=52°$, 解这个三角形.

5. 已知 $a=26.48$, $b=43.47$, $A=55°10'$, 解这个三角形.

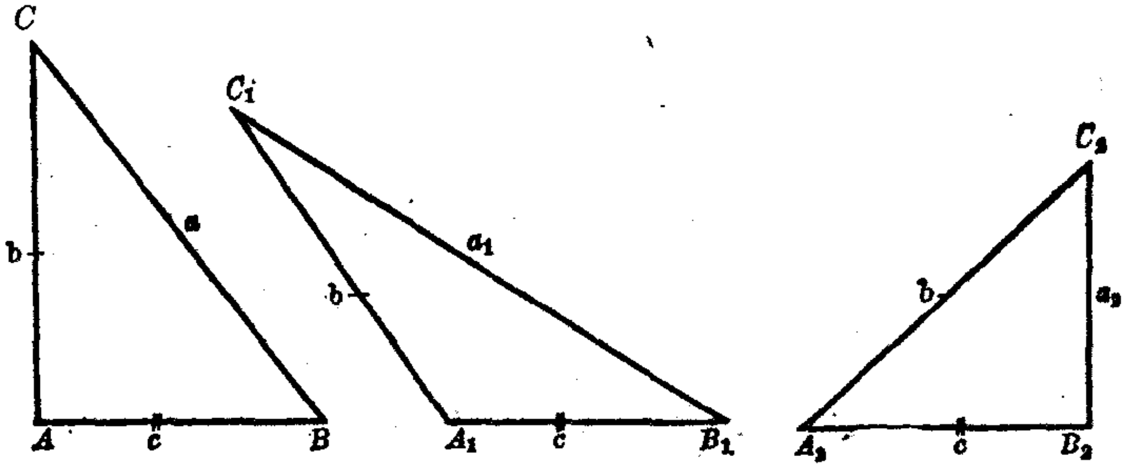
6. 已知 $a=12.04$, $b=20$, $A=37°$, 解这个三角形.

7. 两浮标相距 64.2 m, 一船距较近的浮标 74.1 m, 两浮标到这船的二直线所成的角为 27°18′, 这船与较远的浮标相距若干?

8. 平行四边形一边的长 35 cm, 一对角线的长 63 cm, 两对角线的交角为 21°37′, 求另一对角线的长.

§5·5 余 弦 定 理

根据勾股定理, 我们知道, 在 $\triangle ABC$ 中, 如果角 A 是直角, 那末 $a^2=b^2+c^2$[图 5·12(i)].



(i) (ii) (iii)

图 5·12

现在改变角 A 的大小, 但保持两边 b 和 c 的长不变. 那末当角 A 变成钝角时[图 5·12(ii)],

$$a_1>a,$$

因而 $$a_1^2>a^2,$$

就是 $$a_1^2>b^2+c^2;$$

当角 A 变成锐角时[图 5·12(iii)],

$$a_2<a,$$

因而 $$a_2^2<a^2,$$

就是 $$a_2^2<b^2+c^2.$$

这就是说，在任意三角形中，钝角对边的平方大于其他两边的平方的和；锐角对边的平方小于其他两边的平方的和.

现在来研究这样的问题：根据两边和它们所夹的角，怎样算出这个角的对边的平方？

我们可以证得下面的结果，在任意三角形 ABC 中，

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

这里 a, b 和 c 分别是角 A, B 和 C 的对边.

按照角 A 的大小，我们分三种情形来证明：

(1) $\angle A$ 是锐角：在图 5·13 的三角形 ABC 中，作 $CD\perp AB$ 交 AB 于 D. 那末

$$a^2=CD^2+BD^2.$$

但 $$CD^2=b^2-AD^2,$$

$$BD^2=(c-AD)^2.$$

所以
$$\begin{aligned}a^2&=b^2-AD^2+(c-AD)^2\\&=b^2-AD^2+c^2-2c\cdot AD+AD^2\\&=b^2+c^2-2c\cdot AD.\end{aligned}$$

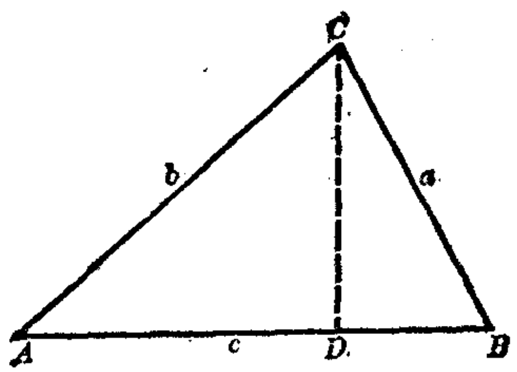


图 5·13

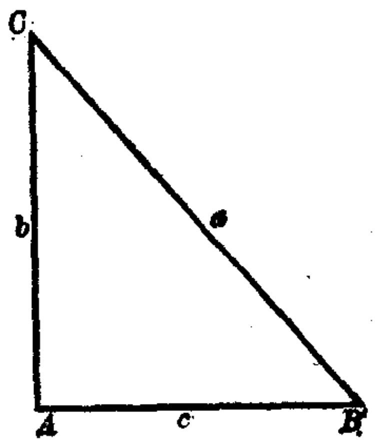


图 5·14

但在直角三角形 ACD 中，

$$AD=b\cos A.$$

因此，
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

(2) $\angle A$ 是直角：在图 5·14 中，

$$a^2=b^2+c^2.$$

因为
$$\cos A=\cos 90^\circ=0,$$

所以
$$b^2+c^2-2bc\cos A=b^2+c^2-0=b^2+c^2.$$

因此，我们也得到

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

(3) $\angle A$ 是钝角：作 $CD\perp AB$，交 BA 的延长线于 D(图 5·15)．那末

$$a^2=CD^2+BD^2.$$

但
$$CD^2=b^2-AD^2,$$
$$BD^2=(c+AD)^2.$$

所以
$$\begin{aligned}a^2&=b^2-AD^2+(c+AD)^2\\&=b^2-AD^2+c^2\\&\quad+2c\cdot AD+AD^2\\&=b^2+c^2+2c\cdot AD.\end{aligned}$$

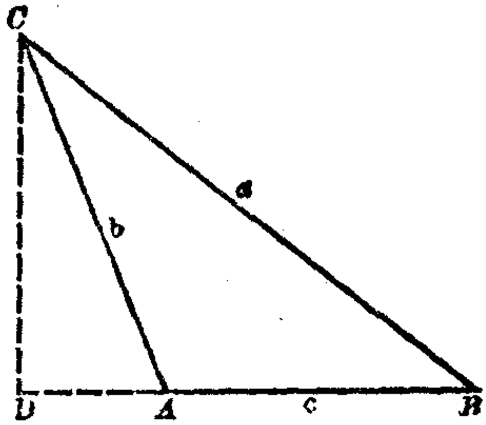


图 5·15

但在直角三角形 ACD 中，

$$AD=b\cos(180^\circ-A)=-b\cos A.$$

因此，我们仍得到

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A.$$

上面证明了在所有的情况下，三角形一边的平方等于另外两边的平方和减去这两边与它们夹角的余弦的积的两倍．这样，在任意三角形 ABC 中，可以知道

$$\boldsymbol{a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,}$$

$$\boldsymbol{b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,}$$

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C.$$

这个结论叫做余弦定理.

例　在 $\triangle ABC$ 中,用余弦定理证明:

$$c=a\cos B+b\cos A,$$

$$a=b\cos C+c\cos B,$$

$$b=c\cos A+a\cos C.$$

【证】 根据余弦定理

$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$

得
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}.$$

同样,由
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

得
$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

因此,

$$a\cos B+b\cos A=a\cdot\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca}+b\cdot\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$$

$$=\frac{c^2+a^2-b^2}{2c}+\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}=c.$$

就是
$$c=a\cos B+b\cos A.$$

其余两个公式也可以同样证明.

这里证明的三个式子叫做射影定理.

习　题　5·5

在 $\triangle ABC$ 中,求证(1～7):

1. $a^2+b^2+c^2=2(bc\cos A+ca\cos B+ab\cos C)$.
2. $(b+c)\cos A+(c+a)\cos B+(a+b)\cos C=a+b+c$.
3. $a(b\cos C-c\cos B)=b^2-c^2$.
4. $b^2\sin 2C+c^2\sin 2B=2bc\sin A$.
5. $a^2(\cos^2 B-\cos^2 C)+b^2(\cos^2 C-\cos^2 A)+c^2(\cos^2 A-\cos^2 B)=0$.

6. $a\sin(B-C)+b\sin(C-A)+c\sin(A-B)=0$.

7. $\dfrac{\cos A}{a}+\dfrac{\cos B}{b}+\dfrac{\cos C}{c}=\dfrac{a^2+b^2+c^2}{2abc}$.

8. 已知 $a^2=b^2+bc+c^2$，求 A.

§5·6 已知两边和它们的夹角，用余弦定理解斜三角形

已知一个三角形的两条边和它们所夹的角，应用余弦定理，可以解这个斜三角形(就是§5·1中的第三类问题). 现在举例说明如下：

例1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b=40.33$，$c=32.11$，$A=73°40'$，解这个三角形(图5·16).

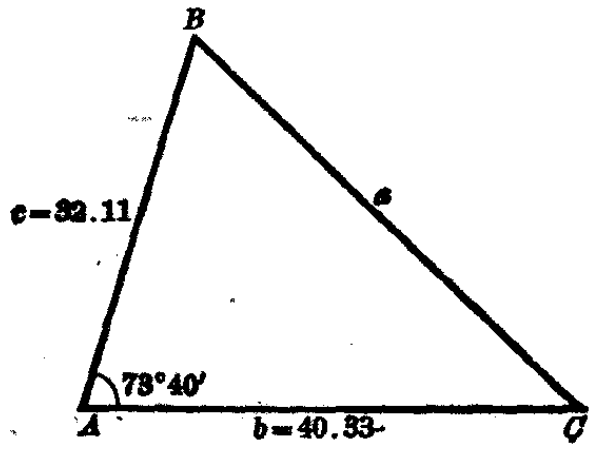


图 5·16

【解】 (1) 由余弦定理，得

$$\begin{aligned}a^2&=b^2+c^2-2bc\cos A\\&=40.33^2+32.11^2-2\times40.33\times32.11\times\cos 73°40'\\&=40.33^2+32.11^2-2\times40.33\times32.11\times0.2813\\&=1626.5+1031.1-728.6=1929.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a=43.92.$$

(2) 应用正弦定理求角 C. 由

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{c}{\sin C},$$

得
$$\sin C=\frac{c\sin A}{a}=\frac{32.11\sin 73°40'}{43.92}$$
$$=\frac{32.11\times 0.9596}{43.92}=\frac{30.813}{43.92}$$
$$=0.7016.$$

查正弦表，得

$$C=44°33'.$$

(3) $B=180°-(A+C)=180°-(73°40'+44°33')$
$=61°47'.$

在这个例题中，我们看到，应用余弦定理解已知两边和它们的夹角的三角形时，一般步骤是：先求出未知的一边；再应用正弦定理求出未知的一个锐角；最后根据 $A+B+C=180°$，求第三个角.

求数的平方与平方根，可以利用四位数学用表中的表 XI 和表 XII. 表的后面都有用法的说明.

我们还要注意，在用正弦定理求未知的角时，由于根据正弦的值求角，一般可以有两个值，因此，我们应该先求对着较短的边的一个未知角．这样就可以一定取一个锐角的值，避免多余的讨论．在上面的例题中，因为 $c<b$，可以知道角 C 一定是锐角，所以我们就先求角 C.

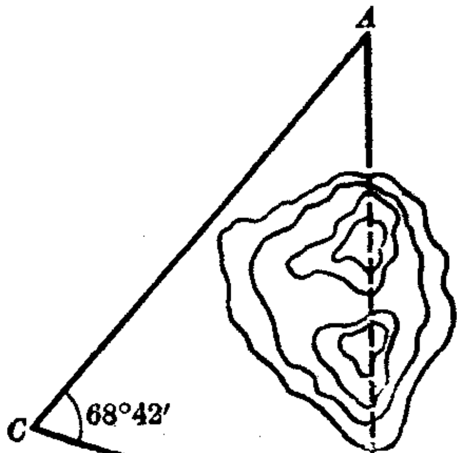


图 5·17

例 2. A, B 两点之间隔着一个池，现选择另一点 C，测得 $CA=$

462 米，$CB=322$ 米，$\angle ACB=68°42'$. 求 A 与 B 之间的距离(图 5·17).

【解】 $AB^2=CA^2+CB^2-2CA\cdot CB\cos\angle ACB$

$=426^2+322^2-2\times426\times322\times\cos68°42'$

$=426^2+322^2-2\times426\times322\times0.3633$

$=181500+103700-99700$

$=185500.$

$\therefore\quad AB=\sqrt{185500}=431.$

答：A 与 B 间的距离约为 431 米.

习 题 5·6

1. 解下列各三角形：

(1) 已知 $a=94$, $b=56$, $C=29°$;

(2) 已知 $b=200$, $c=125$, $A=68°18'$;

(3) 已知 $a=100$, $c=130$, $B=51°49'$.

2. 有中隔障碍物的 A, B 两地，从另一处 C 能看到 A, B, 并测得 $BC=400\,\text{m}$, $AC=320\,\text{m}$, $\angle ACB=110°21'$, 求 A, B 间的距离.

3. 已知 $b=91$, $c=125$, $\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}=\dfrac{17}{6}$, 求 a.

4. 已知 $a=(m+n)(m-3n)$, $b=4mn$, $C=\dfrac{2\pi}{3}$, 求 $c\,(m>3n>0)$.

5. 两游艇自同地同时出发，一以每小时 10.44 km 的速度向正北行驶，一以每小时 7.71 km 的速度向北偏东 45° 的方向行驶；40 分钟末两艇距离多远？

§5·7 已知三边，用余弦定理解斜三角形

如果知道任意三角形的三条边，也可以用余弦定理来求三个角(就是 §5·1 中的第四类问题). 因为从余弦定理的三

个公式

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$
$$b^2=c^2+a^2-2ca\cos B,$$
$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C,$$

可以分别得到

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc},$$
$$\cos B=\frac{c^2+a^2-b^2}{2ca},$$
$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}.$$

现在举例说明如下:

例 1. 在 $\triangle ABC$ 中,已知 $a=32$, $b=40$, $c=66$, 解这个三角形(图 5·18).

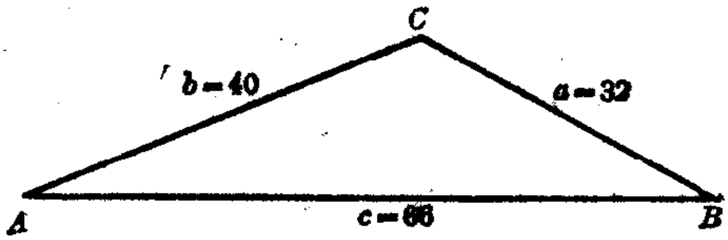


图 5·18

【解】 (1) $\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$$=\frac{40^2+66^2-32^2}{2\times40\times66}$$

$$=\frac{1600+4356-1024}{5280}$$

$$=\frac{4932}{5280}=0.9341.$$

查余弦表,得

$$A=20°55'.$$

(2) $\cos B=\dfrac{c^2+a^2-b^2}{2ca}=\dfrac{66^2+32^2-40^2}{2\times66\times32}$

$$=\frac{4356+1024-1600}{4224}$$

$$=\frac{3780}{4224}=0.8949.$$

查余弦表，得

$$B=26°30'.$$

(3) $\cos C=\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\dfrac{32^2+40^2-66^2}{2\times32\times40}$

$$=\frac{1024+1600-4356}{2560}$$

$$=-\frac{1732}{2560}$$

$$=-0.6766.$$

查余弦表得 $\cos 47°25'=+0.6766$. 这里余弦的值等于 -0.6766, 所以角 $C=180°-47°25'=132°35'$.

注意 解已知三边的三角形，用余弦定理求得一个角以后，第二个角也可以应用正弦定理来求. 比方说，在上面的例题中，求得角 A 的值以后，可以根据 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ 来求角 B.（请读者计算一下，看和上面的结果是不是相同.）但采用这个方法时，所选的第二个角应该是锐角，也就是对着较短的边的一个角.

另外，求得两个角以后，当然可以根据 $A+B+C=180°$ 来求第三个角. 不过为了便于验算，我们通常总是独立地求出三个角，而利用三角形内角和的性质来进行验算. 例如，在这里，我们得到 $20°55'+26°30'+132°35'=180°$，可以知道计算没有错误. 有时尽管没有算错，但求得的三个角的和可能稍稍比 $180°$ 大几分或者小几分. 这是因为三角函数表所载的都是函数的近似值；根据它们求得的结果总不免有一些误差的缘故. 遇到这样的情形，我们可以把相差的几分适当地分配在三个角的值上，修正我们所得到的答案.

例 2. 长 17 米的梯子，靠在斜壁上，梯脚与壁基相距 7 米，梯顶在沿着壁向上 15 米的地方，求壁面和地面所成的角 α。

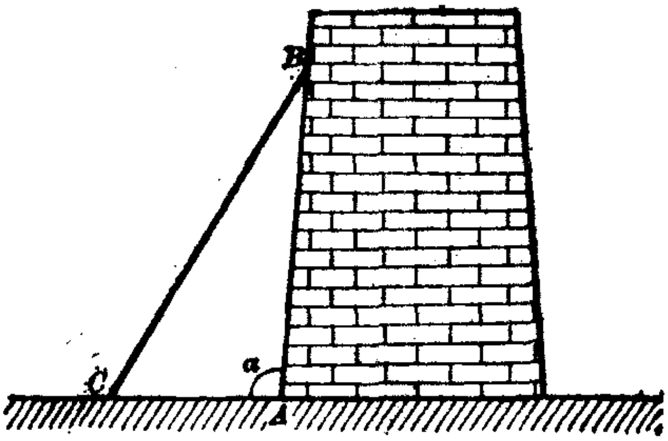


图 5·19

【解】 如图 5·19, $BC=17$, $CA=7$, $AB=15$.

由 $$BC^2=AB^2+AC^2-2AB\cdot AC\cos\alpha,$$

得 $$\cos\alpha=\frac{AB^2+AC^2-BC^2}{2AB\cdot AC}=\frac{15^2+7^2-17^2}{2\times15\times7}$$

$$=\frac{225+49-289}{210}=-\frac{15}{210}=-0.0714.$$

查表得 $$\cos 85°54'=+0.0714.$$

$$\therefore\quad \alpha=180°-85°54'=94°6'.$$

答：壁面和地面所成的角约为 94°.

习 题 5·7

1. 解下列各三角形，已知

(1) $a=2$, $b=\sqrt{6}$, $c=\sqrt{3}+1$;

(2) $a=2000$, $b=1050$, $c=1150$.

2. 三角形的三边为 m, n, $\sqrt{m^2+mn+n^2}$，求最大的角。

3. 三角形的三边为 56, 65, 33，求最大的角.

4. 三角形的三边为 7, $4\sqrt{3}$, $\sqrt{13}$，求最小的角.

5. 三角形三边的比为2:3:4，求最大的角.

6. 在$\triangle ABC$中，已知$C=60°$，求证

$$\frac{1}{a+c}+\frac{1}{b+c}=\frac{3}{a+b+c}.$$

*7. 一平行四边形的两边各为52.1cm与68.5cm，较短的对角线为31.6cm．求较长的对角线的长(精确到0.01cm).

8. 已知梯形的两底为10，14，两腰是7，6；求这梯形的各个角.

本章提要

1. 三角形的各元素间的关系

(1) 正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}$.

(2) 余弦定理：$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$.

(3) 模尔外得公式：$\dfrac{a+b}{c}=\dfrac{\cos\dfrac{A-B}{2}}{\sin\dfrac{C}{2}}$，$\dfrac{a-b}{c}=\dfrac{\sin\dfrac{A-B}{2}}{\cos\dfrac{C}{2}}$.

(4) 射影定理：$c=a\cos B+b\cos A$.

2. 斜三角形的解法

已知条件	解法
两角和一边(例如A, B, c)	1. 利用$A+B+C=180°$，求C; 2. 应用正弦定理求a, b.
两边和其中一边的对角(例如a, b, A)	1. 应用正弦定理求B; 2. 利用$A+B+C=180°$，求C; 3. 应用正弦定理求c.
两边和夹角(例如a, b, C)	1. 应用余弦定理求c; 2. 应用正弦定理求短边所对的角; 3. 利用$A+B+C=180°$，求另一角:
三边(a, b, c)	应用余弦定理求A, B, C.

复 习 题 五

1. 解下列各三角形，已知

(1) $A=54°28'$, $C=60°$, $a=400$;

(2) $a=32.16$, $c=27.08$, $C=52°24'$;

(3) $a=55.55$, $c=66.66$, $C=77°42'$;

(4) $a=8.656$, $c=10$, $A=59°57'$;

(5) $b=3069$, $c=1223$, $C=55°52'$.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，如果 $\dfrac{a}{\cos A}=\dfrac{b}{\cos B}=\dfrac{c}{\cos C}$，那末 $\triangle ABC$ 是正三角形.

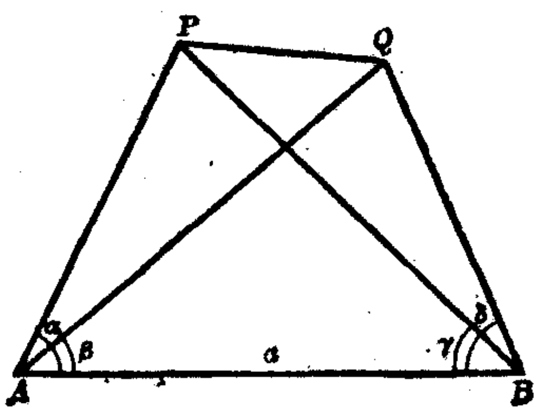
3. 已知 $B=30°$, $c=150$, $b=50\sqrt{3}$. 求证满足这条件的三角形有两个，一个是等腰三角形，另一个是直角三角形.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，求证 $(a-b)^2\cos^2\dfrac{C}{2}+(a+b)^2\sin^2\dfrac{C}{2}=c^2$.

5. 三角形三内角的比是 5:10:21，最小角所对的边是 3cm，求最长的边长(精确到 0.001cm).

6. 设塔 PQ，Q 为塔基，由地上的一点 A 测得塔顶的仰角为 α，由 A 向 Q 前进距离 a 至 B，测得塔顶的仰角为 β，求证塔高 $x=\dfrac{a\sin\alpha\sin\beta}{\sin(\beta-\alpha)}$.

*7. 有两点 P, Q 不能直接到达，在同一平面上找适当的 A, B 两点，测得 $AB=a$. 在 A 处测得 $\angle PAB=\alpha$, $\angle QAB=\beta$; 在 B 处测得 $\angle PBA=\gamma$, $\angle QBA=\delta$; 怎样算出 PQ 的长?



(第 7 题)

*8. 平地上一线段的长为 $2a$，由它的两端测得一屋顶的仰角为 θ，由线段的中点测得屋顶的仰角为 ϕ，求证屋顶的高为

$$\frac{a\sin\theta\sin\phi}{\sqrt{\sin(\phi+\theta)\sin(\phi-\theta)}}.$$

9. 一梯靠于墙上与地面成 75° 角，上端离地面 27 m，将梯足固定，转动上部，靠在街的另一旁墙上，这时梯与地面成 15° 角，求街阔和梯长.

10. 在 $\triangle ABC$ 中，求证

$$a^2-2ab\cos(60^\circ+C)=c^2-2bc\cos(60^\circ+A).$$

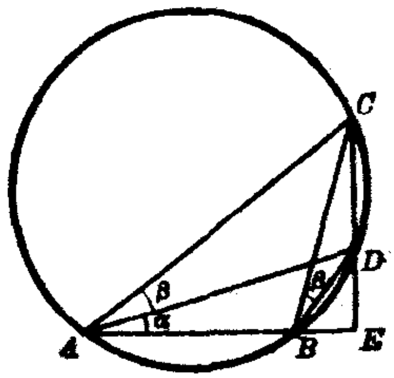
*11. 若已知 a, b 与 A 的三角形有两个解，求证

$$|c_1-c_2|=2\sqrt{a^2-b^2\sin A}.$$

12. 两只船同时由同一海港出发，它们的速率为每小时 20 km 和 15 km；如果两船的航线是相交成 30° 角的直线，4 小时以后它们相距几公里？

*13. 自通过城门的直街道上一点 A 测得城楼 ED 的仰角为 α，楼上直立一旗杆 DC 的视角为 $\beta(\angle CAD)$，向城门走近距离 a，测得旗杆的视角仍为 β. 求旗杆的长.

[提示：因为 $\angle CAD=\angle CBD=\beta$，所以可知 A, B, D, C 四点共圆.]



(第 13 题)

第六章　利用对数解三角形

§6·1　三角函数对数表

通过前一阶段的学习，我们已经学会了根据已知的条件来解直角三角形和斜三角形；但在解题的过程中，往往要进行十分繁琐的运算，不仅要花费很多时间，而且容易产生错误．为了简化计算手续，我们可以利用对数．

利用对数解三角形，除掉要用到代数中关于对数的知识以外，我们还要学会怎样求已知角的三角函数的对数，以及反过来怎样从已知的三角函数的对数值，求出这个角．

1．求已知角的三角函数的对数

求已知角的三角函数的对数，可以先由三角函数表查得这个已知角的三角函数，再由对数表求它的对数．例如，求 $\lg\sin 38°41'$，可以先由三角函数表求得

$$\sin 38°41'=0.6250,$$

再由对数表求得

$$\lg 0.6250=\bar{1}.7959,$$

由此可知

$$\lg\sin 38°41'=\bar{1}.7959.$$

上面的方法需要查两次表，为了简化查表的手续，我们可以利用"三角函数对数表"，这样就可以直接查得已知角的三角函数的对数了．

在"四位数学用表"内的第 III 表到第 VII 表中，可以查得每相差 $1'$ 的各锐角的正弦，余弦，正切和余切的对数(精确到小数第四位)，现在举例来说明它们的查法．

例 1． 求 $\lg\sin 49°54'$ 的值．

【解】 在四位数学用表表 IV 中，左上角标有 A 的直行中查得

49°，然后横着向右查到顶上标有 54′ 的一行处得 $\bar{1}.8836$（在表中 $\bar{1}$ 省略了）．所以

$$\lg\sin 49°54'=\bar{1}.8836.$$

例 2． 求 $\lg\cos 76°34'$ 的值．

【解】 在四位数学用表表 III 中右下角标有 A 的直行中向上查得 76°30′，横着向左查到底下标有 4′ 的一行处得 $\bar{1}.3661$．所以

$$\lg\cos 76°34'=\bar{1}.3661.$$

例 3． 求 $\lg\cos 34°28'$ 的值．

【解】 在四位数学用表表 IV 中右下方标有 A 的直行中向上查得 34°，横着向左查到底下标有 30′ 的一行处得 $\bar{1}.9160$，再横着向右查到表的末三行中标有 2′ 的一行处得 2，这就是 0.0002． 然后把这个数加到 $\bar{1}.9160$ 上去．所以 $\lg\cos 34°28'=\bar{1}.9160+0.0002=\bar{1}.9162$（注意，锐角的余弦和它的对数都随着角的增大而减小）．

例 4． 求 $\lg\operatorname{tg} 82°17'$ 的值．

【解】 在四位数学用表表 VII 中左上角标有 A 的直行中查得 82°10′，再横着向右查到顶上标有 7′ 的一行处得 0.8681．所以 $\lg\operatorname{tg} 82°17'=0.8681$．

例 5． 求 $\lg\operatorname{ctg} 55°51'$ 的值．

【解】 在四位数学用表表 VI 中右下方标有 A 的直行中向上查得 55°，再横着向左查到对准下面标有 48′ 的一行处得 $\bar{1}.8323$． 然后又横着向右查到表的末三行中标有 3′ 的一行处得 8，这就是 0.0008． 再从 $\bar{1}.8323$ 减去 0.0008．所以 $\lg\operatorname{ctg} 55°51'=\bar{1}.8323-0.0008=\bar{1}.8315$（注意，锐角的余切和它的对数都随着角的增大而减小）．

2．已知一个角的三角函数的对数，求这个角

如果已知一个锐角的正弦，余弦，正切或者余切的对数，我们也可以从这些表中查得这个锐角精确到 1′ 的近似值．举例如下：

例 6． 已知 $\lg\sin A=\bar{1}.4508$，求锐角 A．

【解】 在四位数学用表表 IV 中，查得 $\bar{1}.4508$． 横着向左查到顶上标有 A 的直行中为 16°；然后再看 $\bar{1}.4508$ 的直行顶上对准的是 24′．所以 $A=16°24'$．

例 7． 已知 $\lg\cos A=\bar{2}.8321$，求锐角 A．

【解】 在四位数学用表表III中，查得与$\bar{2}.8321$最接近的数是$\bar{2}.8326$．横着向右看下面标有A的直行中为$86°00'$；然后再看$\bar{2}.8326$的直行底下对准的是$6'$．所以得到A的精确到$1'$的近似值是$86°6'$．

例8．已知$\lg \operatorname{tg} A=0.3260$，求锐角$A$．

【解】 在四位数学用表表VI中，查得与0.3260最接近的数是0.3254．横着向左查到上面标有A的直行中为$64°$；然后再看0.3254的直行顶上对准的是$42'$．但0.3260比0.3254大0.0006．于是再从0.3254横着向右查到末三行中与6较接近的7上面对准的是$2'$．由于锐角的正切和它的对数都是随着角的增大而增大的，所以$A=64°42'+2'=64°44'$．

例9．已知$\lg \operatorname{ctg} A=\bar{1}.8205$，求锐角$A$．

【解】 在四位数学用表表VI中，查得与$\bar{1}.8205$最接近的数是$\bar{1}.8208$．横着向右查到底下标有A的直行中为$56°$，然后再看$\bar{1}.8208$的直行下面对准的是$30'$．但$\bar{1}.8208$比$\bar{1}.8205$大0.0003．于是再从$\bar{1}.8208$横着向右看到末三行中的3底下对准的是$1'$．由于锐角的余切和它的对数都是随着角的增大而减小的，所以$A=56°30'+1'=56°31'$．

例10．求适合于等式$\lg\sin x=\bar{1}.9289$的一切角x．

【解】 查表得到适合于等式$\lg\sin x=\bar{1}.9289$的锐角x为$58°6'$，可见$180°-58°6'=121°54'$也适合这个等式．所以适合这个等式的一切角x是$n\cdot 360°+58°6'$和$n\cdot 360°+121°54'$．

习　题　6·1

1．查表求下列各三角函数的对数的值：

(1) $\lg\sin 61°50'$；　(2) $\lg\sin 67°20'$；

(3) $\lg\cos 66°10'$；　(4) $\lg\cos 89°23'$；

(5) $\lg \operatorname{tg} 35°50'$；　(6) $\lg \operatorname{tg} 88°38'$；

(7) $\lg \operatorname{ctg} 47°59'$；　(8) $\lg \operatorname{ctg} 11°21'$．

2．查表求下列各式中的锐角α：

(1) $\lg\sin\alpha=\bar{1}.4321$；　(2) $\lg\sin\alpha=\bar{2}.9960$；

(3) $\lg\cos\alpha=\bar{2}.9301$；　(4) $\lg\cos\alpha=\bar{1}.8839$；

/

(5) $\lg \operatorname{tg} \alpha=2.0311$; (6) $\lg \operatorname{tg} \alpha=\bar{2}.0311$;

(7) $\lg \operatorname{ctg} \alpha=\bar{1}.5018$; (8) $\lg \operatorname{ctg} \alpha=0.7865$.

3．求适合于下列条件的角 θ:

(1) $\lg \sin 2\theta=\bar{1}.6004 \quad (0<\theta<90°)$;

(2) $\lg \cos \dfrac{\theta}{2}=\bar{1}.7031 \quad (0<\theta<180°)$;

(3) $\lg \operatorname{tg} 3\theta=0.1184 \quad (0<\theta<90°)$;

(4) $\lg \operatorname{ctg} \dfrac{2\theta}{3}=1.0020 \quad (0<\theta<360°)$.

4．求适合等式 $\lg \cos x=\bar{1}.5555$ 的一切角 x.

5．求适合等式 $\lg \operatorname{ctg} 2x=0.8254$ 的一切角 x.

§6·2 利用三角函数对数表进行计算

上一节里，我们学习了利用三角函数对数表来求已知角的三角函数的对数，和从三角函数的对数来求锐角的方法．现在我们就利用三角函数对数表对含有三角函数的式子进行计算．举例说明如下：

例 1． 利用对数计算 x 的值:

$$x=\frac{\sin 47°55'+\cos 38°17'}{\cos 26°25'-\cos 33°47'}.$$

【解】 应用三角函数的和化为积的公式，得到

$$\begin{aligned}\sin 47°55'+\cos 38°17'&=\sin 47°55'+\sin 51°43'\\&=2\sin 49°49'\cos 1°54',\end{aligned}$$

$$\cos 26°25'-\cos 33°47'=2\sin 30°6'\sin 3°41';$$

$$\therefore \quad x=\frac{\sin 49°49'\cos 1°54'}{\sin 30°6'\sin 3°41'}.$$

两边取对数，并且根据对数运算法则，得

$$\lg x=\lg \sin 49°49'+\lg \cos 1°54'-(\lg \sin 30°6'+\lg \sin 3°41').$$

$$\begin{array}{r}\lg \sin 49°49'=\bar{1}.8831\\ \underline{\lg \cos \ \ 1°54'=\bar{1}.9998}\ (+\\ \bar{1}.8829\end{array}$$

$$
\begin{array}{rl}
\lg\sin 30^\circ\ \ 6' = \bar{1}.7003 & \\
\lg\sin\ \ 3^\circ 41' = \bar{2}.8078 & (+ \\
\hline
\bar{2}.5081 & \\
\bar{1}.8829 & \\
\bar{2}.5081 & (- \\
\hline
\lg x = 1.3748 &
\end{array}
$$

$$\therefore \quad x = 23.70.$$

例 2. 利用对数计算 x 的值:

$$x = 31.98(\mathrm{tg}\, 48^\circ 42' - \mathrm{tg}\, 73^\circ 28').$$

【解】 应用三角函数的和化为积的公式,得到

$$\mathrm{tg}\, 48^\circ 42' - \mathrm{tg}\, 73^\circ 28' = \frac{\sin 48^\circ 42'}{\cos 48^\circ 42'} - \frac{\sin 73^\circ 28'}{\cos 73^\circ 28'}$$

$$= -\frac{\sin 24^\circ 46'}{\cos 48^\circ 42' \cos 73^\circ 28'};$$

$$\therefore \quad x = -\frac{31.98 \sin 24^\circ 46'}{\cos 48^\circ 42' \cos 73^\circ 28'}.$$

两边取对数,并且根据对数运算法则,得

$$\lg(-x) = \lg 31.98 + \lg\sin 24^\circ 46' - (\lg\cos 48^\circ 42' + \lg\cos 73^\circ 28').$$

$$
\begin{array}{rl}
\lg 31.98 = 1.5049 & \\
\lg\sin 24^\circ 46' = \bar{1}.6221 & (+ \\
\hline
1.1270 & \\
\lg\cos 48^\circ 42' = \bar{1}.8195 & \\
\lg\cos 73^\circ 28' = \bar{1}.4542 & (+ \\
\hline
\bar{1}.2737 & \\
1.1270 & \\
\bar{1}.2737 & (- \\
\hline
\lg(-x) = 1.8533 &
\end{array}
$$

$$-x = 71.34,$$

$$\therefore \quad x = -71.34.$$

通过上面的例子可以看出,利用对数计算的步骤是:

(1) 化成适于对数计算的形式;

(2) 取对数,并展开成横式;

(3) 列出计算的格式,并把等号对齐;

(4) 将查表所得的值写在等号的右边,并对齐小数位置;

(5) 最后进行计算.

习　题　6·2

1. 利用对数计算,求适合等式 $x\sin 72°26'=123.45\sin 22°27'$ 的 x 的值.

2. 利用对数计算 $x=(\cos 73°55'+\cos 42°11')^2$.

3. 利用对数计算 $x=(\operatorname{ctg} 71°20'-\operatorname{ctg} 51°10')^3$.

4. 利用对数计算,求适合等式 $\dfrac{13.42}{\sin 27°29'}=\dfrac{26.95}{\sin x}$ 的锐角 x.

5. 利用对数计算,求适合等式 $2\sin^3 x=\sin 68°40'$ 的锐角 x.

6. 利用对数计算,求适合等式 $\operatorname{tg} x=\sqrt{\dfrac{4.2\operatorname{tg} 47°13'}{\cos 17°33'}}$ 的锐角 x.

7. 利用对数计算,求适合等式 $x^2\sin 63°45'=\sqrt{211}\operatorname{ctg} 39°38'$ 的正数 x.

8. 利用对数计算,求适合等式 $x=\sqrt[3]{21.72\cos 122°10'}$ 的 x.

9. 利用对数计算,求 $\sqrt[3]{\dfrac{\sin\theta\cos 3\theta}{2x\operatorname{tg}^2 2\theta}}$ 的值,其中 $\theta=38°18'$,$x=0.0421$.

§6·3　利用对数解直角三角形

在 §1·8 中,我们已经学会了根据已知条件来解直角三角形. 现在利用对数计算来解,我们看下面的例题:

例 1. 在直角三角形 ABC 中,已知 $A=63°23'$,$c=39.41$,解这个三角形.

【解】

$$B=90°-63°23'=26°37'.$$

$$a=c\sin A=39.41\sin 63°23'.$$

$$\lg a=\lg 39.41+\lg\sin 63°23'.$$

$$\begin{array}{r} \lg 39.41=1.5956 \\ \lg\sin 63°23'=\bar{1}.9513 \\ \hline \lg a=1.5469 \end{array} \quad (+$$

$$\therefore \quad a=35.23.$$

$$b=c\cos A=39.41\cos 63°23'.$$

$$\lg b=\lg 39.41+\lg\cos 63°23'.$$

$$\begin{array}{r} \lg 39.41=1.5956 \\ \lg\cos 63°23'=\bar{1}.6513 \\ \hline \lg b=1.2469 \end{array} \quad (+$$

$$\therefore \quad b=17.66.$$

例 2. 一人在距塔基 50.68 m 处测得塔顶的仰角是 14°36′，求塔高.

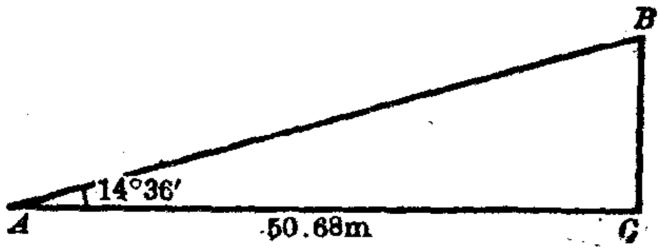


图 6·1

【解】 设塔高 BC 为 x(图 6·1),

$$\operatorname{tg} A=\frac{x}{AC}.$$

$$x=AC\cdot\operatorname{tg} A=50.68\operatorname{tg} 14°36'.$$

$$\lg x=\lg 50.68+\lg\operatorname{tg} 14°36'.$$

$$\begin{array}{r} \lg 50.68=1.7049 \\ \lg\operatorname{tg} 14°36'=\bar{1}.4158 \\ \hline \lg x=1.1207 \end{array} \quad (+$$

$$\therefore \quad x=13.20.$$

答：塔高 13.20 m.

例 3. 圆内一弦的长是 18.32 cm，中心到这弦的距离是 9.003 cm，

求这弦所对的中心角和这圆的半径.

【解】 在图 6·2 中,

$$AD=\frac{1}{2}AB=9.16\,\mathrm{cm},$$

$$OD=9.003\,\mathrm{cm}.$$

设 $AO=x$; 又设 $\angle AOB=\theta$. 于是

$$\angle AOD=\frac{\theta}{2}.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\frac{AD}{OD}=\frac{9.16}{9.003},$$

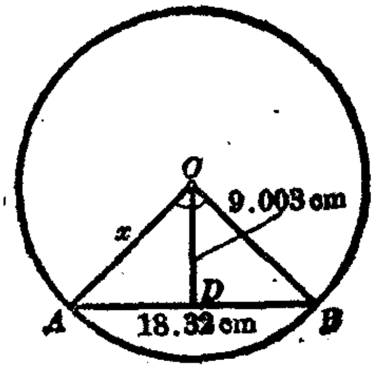


图 6·2

$$\lg\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=\lg 9.16-\lg 9.003.$$

$$\begin{array}{r} \lg 9.16=0.9619 \\ \lg 9.003=0.9543 \\ \hline \lg\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}=0.0076 \end{array}\ (-$$

$$\frac{\theta}{2}=45°30',$$

$$\therefore\quad \theta=91°.$$

$$x=\frac{AD}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{9.16}{\sin 45°30'}.$$

$$\lg x=\lg 9.16-\lg\sin 45°30'.$$

$$\begin{array}{r} \lg 9.16=0.9619 \\ \lg\sin 45°30'=\bar{1}.8532 \\ \hline \lg x=1.1087 \end{array}\ (-$$

$$\therefore\quad x=12.84.$$

答: 弦所对的中心角是 91°, 圆的半径是 12.84 cm.

在利用对数解直角三角形时, 如果是已知两边, 可先求出一个锐角, 然后再求第三边; 我们避免直接用公式

$$c=\sqrt{a^2+b^2}\quad 和\quad a=\sqrt{c^2-b^2}$$

去求, 因为这两个式子不适于直接取对数计算.

习 题 6·3

利用对数计算，解下列各题：

1. 在直角三角形 ABC 中，已知 $A=67°10'$，$c=402$，解这个三角形.

2. 在直角三角形 ABC 中，已知 $B=46°19'$，$b=0.6241$，解这个三角形.

3. 在直角三角形 ABC 中，已知 $B=21°34'$，$a=0.8211$，解这个三角形.

4. 在直角三角形 ABC 中，已知 $b=67.23$，$c=92.51$，解这个三角形.

5. 在直角三角形 ABC 中，已知 $a=4.261$，$b=10.43$，解这个三角形.

6. 河岸上一岩，高出水平面 13.2 m，从直对这岩的对岸一点，测得岩顶的仰角为 14°36'. 求河宽.

7. 圆的半径为 10 cm，圆心角 77°18' 所对的弦长多少？

8. 一车以每小时 30 km 的速度，向上行驶于与水平面成 10° 的角的斜坡上，这车行驶到距水平面 41 m 的高度，需时多少？

§6·4 已知两角和一边，利用对数解斜三角形

已知两角和一边，第三个角是很容易求得的. 其余两边可通过正弦定理再利用对数计算出来. 现在举例说明如下：

例 1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b=5685$，$B=48°38'$，$C=83°16'$，解这个三角形.

【解】 $A=180°-(B+C)$

$=180°-(48°38'+83°16')$

$=48°6'$.

$$a=\frac{b\sin A}{\sin B}=\frac{5685\sin 48°6'}{\sin 48°38'}.$$

$$\lg a=\lg 5685+\lg\sin 48°6'-\lg\sin 48°38'.$$

$$\lg 5685 = 3.7547$$

$$\underline{\lg \sin 48°6' = \bar{1}.8718} \;(+$$

$$3.6265$$

$$\underline{\lg \sin 48°38' = \bar{1}.8753} \;(-$$

$$\lg a = 3.7512$$

$$\therefore \quad a = 5639.$$

$$c = \frac{b \sin C}{\sin B} = \frac{5685 \sin 83°16'}{\sin 48°38'}.$$

$$\lg c = \lg 5685 + \lg \sin 83°16' - \lg \sin 48°38'.$$

$$\lg 5685 = 3.7547$$

$$\underline{\lg \sin 83°16' = \bar{1}.9970} \;(+$$

$$3.7517$$

$$\underline{\lg \sin 48°38' = \bar{1}.8753} \;(-$$

$$\lg c = 3.8764$$

$$\therefore \quad c = 7523.$$

例 2. 一船在 C 点，可由岸上 A 与 B 两点望见(图 6·3). 今测得 $AB = 96.13\ \mathrm{m}$, $\angle CAB = 67°43'$, $\angle CBA = 74°21'$, 求点 A 到船 C 的距离.

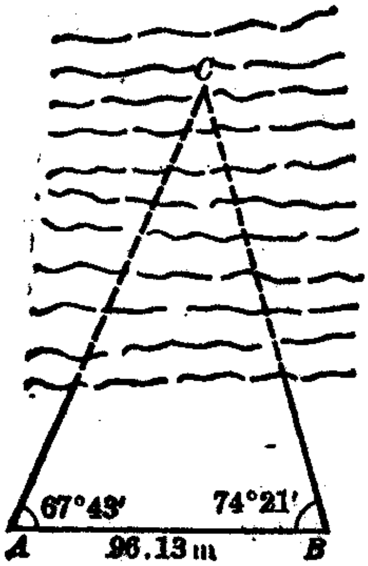


图 6·3

【解】 设 $AC = x$.

$$\begin{aligned} C &= 180° - (\angle CAB + \angle CBA) \\ &= 180° - (67°43' + 74°21') \\ &= 37°56'. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{AB \sin \angle ABC}{\sin \angle ACB} \\ &= \frac{96.13 \sin 74°21'}{\sin 37°56'}. \end{aligned}$$

$$\lg x = \lg 96.13 + \lg \sin 74°21' - \lg \sin 37°56'.$$

$$\lg 96.13 = 1.9828$$

$$\underline{\lg \sin 74°21' = \bar{1}.9836} \;(+$$

$$1.9664$$

$$\underline{\lg \sin 37°56' = \bar{1}.7887} \;(-$$

$$\lg x = 2.1777$$

$\therefore \quad x=150.5.$

答：点 A 到船的距离是 150.5 m.

习　题　6·4

利用对数计算，解下列各题：

1．在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=795,\ A=79°59',\ B=44°41'$. 解这个三角形.

2．在 $\triangle ABC$ 中，已知 $c=2071,\ A=31°9',\ B=115°24'$. 解这个三角形.

3．平行四边形对角线的长为 60 cm，它和两边所成的角为 $47°14'$ 和 $18°53'$. 求这平行四边形两边的长（精确到 0.1 cm）.

4．平面上相距 5 km 处，有两人相向观测在同一个铅直面内的气球，得仰角各为 $55°$ 和 $58°$，求气球与这两人的距离.

5．某人在点 A 处测得塔顶的仰角为 $32°14'$，向塔前进 50 m 到 B 处，测得仰角为 $63°26'$，求塔高.

6．一个三角形的三个内角成 3:4:6 的比，它的最长的边为 42 cm，求它的最短边.

§6·5　已知两边和一边的对角，利用对数解斜三角形

根据 § 5·4 中的讨论，我们看到，已知 a, b 和 A，要解三角形 ABC 时，若 A 是钝角或者直角，那末只有当 $a>b$ 时有一解，$a=b$ 或者 $a<b$ 时都没有解.

如果 A 是锐角，那末，当 $a>b$ 或者 $a=b$ 时有一解. 对于 $a<b$ 的情形，在 § 5·4 例 3 后面的注意中已经指出：可以先算出 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$，根据求得的 $\sin B<1$, $\sin B=1$ 或者 $\sin B>1$ 来决定问题有两解，一解或者没有解. 但当 $\sin B<1$ 时，$\lg\sin B<0$；当 $\sin B=1$ 时，$\lg\sin B=0$；当 $\sin B>1$ 时，$\lg\sin B>0$. 由此可知，利用对数计算，可以根据

$\lg\sin B<0$, $\lg\sin B=0$ 或者 $\lg\sin B>0$ 来决定问题有两解，一解或者没有解.

例 1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=62.24$, $b=74.83$, $A=27°18'$. 解这个三角形.

【解】 这里 A 是锐角，并且 $a<b$，我们先计算 $\lg\sin B$.

$$\sin B=\frac{b\sin A}{a}=\frac{74.83\sin 27°18'}{62.24}.$$

$$\lg\sin B=\lg 74.83+\lg\sin 27°18'-\lg 62.24.$$

$$\begin{array}{rl}
\lg 74.83=1.8741 & \\
\lg\sin 27°18'=\bar{1}.6615 & \\
\hline
1.5356 & (+ \\
\lg 62.24=1.7941 & \\
\hline
\lg\sin B=\bar{1}.7415 & (-
\end{array}$$

因 $\lg\sin B<0$，所以这题有两解，查表得

$$B_1=33°28',\ B_2=180°-B_1=146°32'.$$

$$C_1=180°-(A+B_1)=180°-60°46'=119°14',$$

$$C_2=180°-(A+B_2)=180°-173°50'=6°10'.$$

$$c_1=\frac{a\sin C_1}{\sin A}=\frac{62.24\sin 119°14'}{\sin 27°18'}.$$

$$\lg c_1=\lg 62.24+\lg\sin 119°14'-\lg\sin 27°18'.$$

$$\begin{array}{rl}
\lg 62.24=\bar{1}.7941 & \\
\lg\sin 119°14'=\bar{1}.9365 & \\
\hline
1.7306 & (+ \\
\lg\sin 27°18'=\bar{1}.6615 & \\
\hline
\lg c_1=2.0691, & (-
\end{array}$$

$$\therefore\quad c_1=117.2.$$

$$c_2=\frac{a\sin C_2}{\sin A}$$

$$=\frac{62.24\sin 6°10'}{\sin 27°18'}.$$

$$\lg c_2=\lg 62.24+\lg\sin 6°10'-\lg\sin 27°18'.$$

$$\begin{array}{r} \lg 62.24=1.7941 \\ \lg\sin 6°10'=\bar{1}.0311 \\ \hline 0.8252 \end{array}(+$$

$$\begin{array}{r} \lg\sin 27°18'=\bar{1}.6615 \\ \hline \lg c_2=1.1637, \end{array}(-$$

$$\therefore\quad c_2=14.57.$$

例 2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b=0.0482$, $c=0.0621$, $B=57°37'$. 解这个三角形.

【解】 $\sin C=\dfrac{c\sin B}{b}=\dfrac{0.0621\sin 57°37'}{0.0482}$.

$$\lg\sin C=\lg 0.0621+\lg\sin 57°37'-\lg 0.0482.$$

查表计算后，得

$$\lg\sin C=0.0367.$$

因为 $\lg\sin C>0$, 所以这个问题没有解.

例 3. 由 B 到 A 不能走过，但能望见；若由 B 到另一点 C 的距离为 145.3m, 由 C 到 A 的距离为 178.2m, 并测得 $\angle CBA=41°10'$, 求 A 与 B 间的距离(图 6·4).

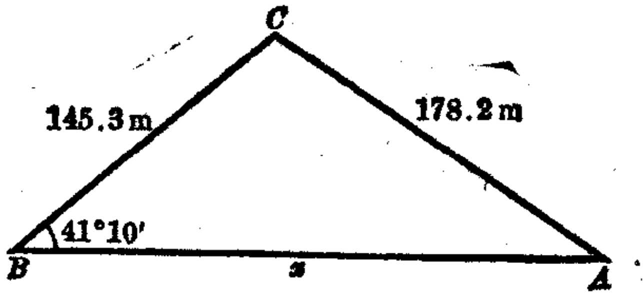


图 6·4

【解】 设 AB 为 x.

$$\sin A=\frac{BC\sin\angle CBA}{AC}=\frac{145.3\sin 41°10'}{178.2}.$$

$$\lg\sin A=\lg 145.3+\lg\sin 41°10'-\lg 178.2.$$

查表计算后，得

$$\lg\sin A=\bar{1}.7298.$$

因为 $\angle CBA$ 是锐角，$CA>CB$, 所以这题只有一解. 查表得

$$A=32°28'.$$

$$C=180°-(A+B)=180°-(32°28'+41°10')=106°22'.$$

$$x=\frac{BC\sin C}{\sin A}=\frac{145.3\sin 106°22'}{\sin 32°28'}.$$

$$\lg x=\lg 145.3+\lg\sin 106°22'-\lg\sin 32°28'.$$

查表计算后，得

$$\lg x=2.4146,$$

$$\therefore\quad x=259.8.$$

答：由 A 到 B 的距离是 259.8m.

注意，在例1和例3中的 $\lg\sin 119°14'$ 和 $\lg\sin 106°22'$，不能从表中直接查得，必须化 $\lg\sin 119°14'=\lg\sin(180°-60°46')=\lg\sin 60°46'$ 和 $\lg\sin 106°22'=\lg\sin 73°38'$，再查表.

习 题 6·5

利用对数计算，解下列各题：

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=6.061$，$b=7.083$，$A=47°25'$. 解这个三角形.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=0.1234$，$b=0.1412$，$B=38°8'$. 解这个三角形.

3. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=72.63$，$b=117.48$，$A=80°$. 解这个三角形.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=8.656$，$c=10$，$A=59°57'$. 解这个三角形.

5. 平行四边形一边的长 70cm，一条对角线的长 126cm，两对角线间的夹角为 21°37′，求另一条对角线的长.

6. 圆外一点 P 到圆的中心 O 的距离为 60.5cm，从 P 作一与 OP 成 18°42′ 角的割线，设圆的半径为 24.2cm，求自 P 点至此割线与圆相交的较近点的距离.

§6·6 正切定理

我们已经看到，有了正弦定理和余弦定理，§5·1 中的所有四类解

斜三角形的问题都得到了解决. 但是，用余弦定理解已知两边和它们的夹角或者已知三边的三角形，对于对数计算是不顶合适的. 这一节中我们要介绍正切定理，它可用来代替余弦定理解已知两边和夹角的三角形.

在正弦定理的公式

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}$$

中,用 k 表示两个相等的比,就是

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=k.$$

那末
$$a=k\sin A,\ b=k\sin B.$$

因此,
$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{k\sin A+k\sin B}{k\sin A-k\sin B}=\frac{\sin A+\sin B}{\sin A-\sin B}.$$

利用三角函数的和化为积的公式,变换分子和分母,得

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}}{2\cos\frac{A+B}{2}\sin\frac{A-B}{2}}=\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}\operatorname{ctg}\frac{A-B}{2}$$

$$=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.$$

所以
$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}}.$$

这样,我们证明了三角形任意两边的和与差的比，等于它们所对角的和的一半的正切与差的一半的正切的比. 因此，在任意三角形 ABC 中,我们可以写出六个联系任何两边与它们的对角的关系式:

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}};\qquad \frac{b+a}{b-a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B+A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-A}{2}};$$

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{B+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{B-C}{2}};\qquad \frac{c+b}{c-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{C+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C-B}{2}};$$

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{C+A}{2}}{\operatorname{tg}\frac{C-A}{2}};\qquad \frac{a+c}{a-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{A+C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-C}{2}}.$$

这个结论叫做**正切定理**.

习 题 6·6

1．已知 $a=2b$, $C=120^\circ$, 求 A 及 B.

2．三角形的两边是 9 与 3, 这两边对角的差是 90°,求这两个角.

3．在三角形 ABC 中,已知 $\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{5}{6}$, $\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{20}{37}$.

(1) 求 $\operatorname{tg}\frac{C}{2}$ 的值; (2) 求证 $\frac{a}{c}=\frac{87}{61}$.

§6·7 已知两边和它们的夹角,利用对数解斜三角形

已知两边和它们的夹角, 解斜三角形, 为了取对数来计算, 我们可以应用正切定理. 举例如下:

例 1. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a=77.99$, $b=83.39$, $C=72^\circ16'$. 解这个三角形.

【解】 (1) $b+a=83.39+77.99=161.38$,

$b-a=83.39-77.99=5.40$,

$$\frac{B+A}{2}=\frac{180^\circ-C}{2}=\frac{180^\circ-72^\circ16'}{2}=53^\circ52'.$$

$$\operatorname{tg}\frac{B-A}{2}=\frac{b-a}{b+a}\operatorname{tg}\frac{B+A}{2}=\frac{5.40}{161.38}\operatorname{tg}53^\circ52'.$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{B-A}{2}=\lg 5.40+\lg\operatorname{tg}53^\circ52'-\lg 161.38.$$

查表计算后，得

$$\lg\operatorname{tg}\frac{B-A}{2}=\bar{2}.6612,$$

$$\therefore\quad \frac{1}{2}(B-A)=2°38'.$$

$$\therefore\quad B=\frac{B+A}{2}+\frac{B-A}{2}=53°52'+2°38'=56°30';$$

$$A=\frac{B+A}{2}-\frac{B-A}{2}=53°52'-2°38'=51°14'.$$

(2) $c=\dfrac{a\sin C}{\sin A}=\dfrac{77.99\sin 72°16'}{\sin 51°14'}$.

$$\lg c=\lg 77.99+\lg\sin 72°16'-\lg\sin 51°14'.$$

查表计算后，得

$$\lg c=1.8789,$$

$$\therefore\quad c=95.24.$$

注意，在这个例题中，解的步骤是

(1) 由 $\dfrac{b+a}{b-a}=\dfrac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+A)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-A)}$ 求 $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-A)$ 的值，这里

$$\frac{1}{2}(B+A)=\frac{1}{2}(180°-C).$$

查表得到 $\frac{1}{2}(B-A)$ 的值．然后由

$$\frac{1}{2}(B+A)+\frac{1}{2}(B-A)=B,\ \frac{1}{2}(B+A)-\frac{1}{2}(B-A)=A,$$

求角 B 和角 A 的值．

(2) 利用正弦定理 $\dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{a}{\sin A}$ $\left(\text{也可以用 } \dfrac{c}{\sin C}=\dfrac{b}{\sin B}\right)$，求未知的一边 c．

例 2．一点距岛的一端为 3 km，距他端为 6.933 km．从这点观测这岛的两端所张的角为 33°56′．求这岛的长．

【解】 如图 6·5，$AC=6.933$ km，$BC=3$ km，$C=33°56'$．设岛长 $AB=x$．

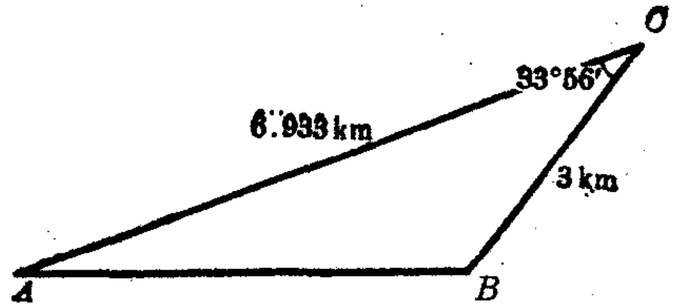


图 6·5

(1) $AC+BC=9.933\,\text{km}$, $AC-BC=3.933\,\text{km}$,

$$\frac{B+A}{2}=\frac{180°-C}{2}=73°2'.$$

$$\operatorname{tg}\frac{B-A}{2}=\frac{3.933}{9.933}\operatorname{tg}73°2'.$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{B-A}{2}=\lg 3.933+\lg\operatorname{tg}73°2'-\lg 9.933.$$

查表计算后，得

$$\lg\operatorname{tg}\frac{B-A}{2}=0.1133,$$

$$\therefore\quad \frac{B-A}{2}=52°23'.$$

$$\therefore\quad A=\frac{B+A}{2}-\frac{B-A}{2}=73°2'-52°23'=20°39'.$$

(2) $x=\dfrac{BC\sin C}{\sin A}=\dfrac{3\sin 33°56'}{\sin 20°39'}$.

$$\lg x=\lg 3+\lg\sin 33°56'-\lg\sin 20°39'.$$

查表计算后，得

$$\lg x=0.6566,$$

$$\therefore\quad x=4.535.$$

答：这岛的长是 4.535 km。

习 题 6·7

利用对数计算，解下列各题：

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=597.3$, $c=702.4$, $B=39°42'$. 解这个三角形.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=88.79$, $b=15.13$, $C=79°13'$. 解这个三角形.

3. 平行四边形的边长各为 344.86 cm 与 202.62 cm，一个内角为 61°16'. 求它的两条对角线的长.

4. 平行四边形的边长各为 23.4 cm 和 41 cm，一个内角为 35°18'. 求较长的对角线的长(精确到 0.1 cm).

5. 两个物体从某一点起作直线匀速运动. 它们的速度分别是每秒 15.6 cm 和 24.9 cm. 如果它们的运动方向所夹的角是 34°20'，它们在 10 秒后相距多远(精确到 0.1 cm)?

6. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $AB=19.32$ cm, $AC=23.57$ cm, $A=52°19'$. 求 AB 边上中线的长.

§6·8 半角定理

在 §6·6 中，我们提出正切定理来代替余弦定理解已知两边和夹角的三角形. 现在我们再提出半角定理来代替余弦定理解已知三边的三角形.

在 $\triangle ABC$ 中，由半角的正切公式，知道

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}}.$$

这里，因为角 A 是三角形的一个内角，它的一半一定是锐角，所以我们在根号前取正号.

由余弦定理 $$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A,$$

得 $$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}.$$

我们来计算 $1-\cos A$ 和 $1+\cos A$:

$$\begin{aligned}1-\cos A&=1-\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}\\&=\frac{2bc-b^2-c^2+a^2}{2bc}=\frac{a^2-(b^2-2bc+c^2)}{2bc}\\&=\frac{a^2-(b-c)^2}{2bc}=\frac{(a+b-c)(a-b+c)}{2bc};\end{aligned}$$

$$1+\cos A=1+\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{2bc+b^2+c^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{(b^2+2bc+c^2)-a^2}{2bc}=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc}$$
$$=\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}.$$

如果设
$$a+b+c=2s,$$
那末在这个等式的两边都减去 $2a$，可以得到
$$-a+b+c=2(s-a).$$
同样，在 $a+b+c=2s$ 的两边都减去 $2b$ 或者 $2c$，可以得到
$$a-b+c=2(s-b);$$
$$a+b-c=2(s-c).$$

因此，上面的结果可以写成
$$1-\cos A=\frac{2(s-c)\cdot 2(s-b)}{2bc}=\frac{2(s-b)(s-c)}{bc}; \tag{1}$$
$$1+\cos A=\frac{2s\cdot 2(s-a)}{2bc}=\frac{2s(s-a)}{bc}. \tag{2}$$

把它们代入半角的正切公式，得
$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\frac{2(s-b)(s-c)}{bc}}{\frac{2s(s-a)}{bc}}},$$
$$\therefore\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}. \tag{3}$$

同样可以知道
$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}; \tag{4}$$
$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}. \tag{5}$$
这里，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

这三个公式叫做**半角定理**.

为了把上面的公式化成容易记忆的形式，我们把公式(3)根号中的分子和分母都乘以 $s-a$，得到

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s(s-a)^2}},$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

用同样的方法，可以把公式(4)和(5)分别写成

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{s-b}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{s-c}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

例1. 在 $\triangle ABC$ 中，求证

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}};\quad \cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}};$$

这里，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

【证】 因为 $\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}$,

由上面的(1)，

$$1-\cos A=\frac{2(s-b)(s-c)}{bc},$$

所以 $$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{\frac{2(s-b)(s-c)}{bc}}{2}}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}.$$

第二个等式留给读者自己证明.

例2. 在 $\triangle ABC$ 中，求证

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

这里，$s=\frac{1}{2}(a+b+c)$.

【证】 由例1，

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}};$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

因此，

$$\sin A=2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

$$=2\sqrt{\frac{s(s-a)(s-b)(s-c)}{b^2c^2}}$$

$$=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

习　题　6·8

1．在 $\triangle ABC$ 中，求证 $\operatorname{tg}\frac{B}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{s-a}{s}$.

2．在 $\triangle ABC$ 中，求证 $(a+b+c)\left(\operatorname{tg}\frac{A}{2}+\operatorname{tg}\frac{B}{2}\right)=2c\cdot\operatorname{ctg}\frac{C}{2}$.

3．在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a+c=2b$，求证 $\operatorname{ctg}\frac{A}{2}+\operatorname{ctg}\frac{C}{2}=2\operatorname{ctg}\frac{B}{2}$.

4．在 $\triangle ABC$ 中，求证 $b\cdot\cos^2\frac{C}{2}+c\cdot\cos^2\frac{B}{2}=s$.

5．在 $\triangle ABC$ 中，求证 $\sin B=\frac{2}{ac}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

6．在 $\triangle ABC$ 中，求证 $1-\operatorname{tg}\frac{A}{2}\cdot\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{c}{s}$.

7．在 $\triangle ABC$ 中，求证

$$bc\sin^2\frac{A}{2}+ca\sin^2\frac{B}{2}+ab\sin^2\frac{C}{2}=bc+ca+ab-s^2.$$

8．在 $\triangle ABC$ 中，求证 $a\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}\operatorname{cosec}\frac{A}{2}=s$.

§6·9　已知三边，利用对数解斜三角形

已知三边，解斜三角形，为了取对数来计算，我们可以应用半角定理，举例如下：

例1．在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=513.4$, $b=726.8$, $c=931.3$．求 A, B 和 C.

【解】 $s=\frac{1}{2}(a+b+c)=1085.8,\ s-a=572.4,\ s-b=359,$

$s-c=154.5.$

(1) 令 $r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=\sqrt{\frac{572.4\times359\times154.5}{1085.8}}.$

$$2\lg r=\lg 572.4+\lg 359+\lg 154.5-\lg 1085.8.$$

查表计算后，得

$$2\lg r=4.4660,$$

$$\lg r=2.2330.$$

(2) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}A=\frac{r}{s-a}=\frac{r}{572.4}.$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}A=\lg r-\lg 572.4.$$

$$\begin{array}{rl} \lg r=2.2330 & \\ \lg 572.4=2.7577 & (- \\ \hline \lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}A=\bar{1}.4753 & \end{array}$$

$$\frac{1}{2}A=16°38',$$

$$\therefore\quad A=33°16'.$$

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}B=\frac{r}{s-b}=\frac{r}{359}.$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}B=\lg r-\lg 359.$$

查表计算后，得

$$\lg\operatorname{tg}\frac{1}{2}B=\bar{1}.6779,$$

$$\frac{1}{2}B=25°28',$$

$$\therefore\quad B=50°56'.$$

$\therefore\quad C=180°-(A+B)=180°-(33°16'+50°56')=95°48'.$

例 2. 一个三角形的边长分别是 1.68 m, 2.04 m 与 2.91 m，求它的最小角.

【解】 设 $a=1.68\,\text{m}$，$b=2.04\,\text{m}$ 和 $c=2.91\,\text{m}$；显然最小角就是 A.

$$s=\frac{1}{2}(a+b+c)=\frac{1}{2}(1.68+2.04+2.91)=3.315,$$

$$s-a=1.635,\ s-b=1.275,\ s-c=0.405.$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}=\sqrt{\frac{1.275\times 0.405}{3.315\times 1.635}}.$$

$$2\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(\lg 1.275+\lg 0.405)-(\lg 3.315+\lg 1.635).$$

查表计算后，得

$$2\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\bar{2}.9791,$$

$$\lg\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\bar{1}.4896,$$

$$\frac{A}{2}=17°9',$$

$$\therefore\quad A=34°18'.$$

注意，因为所求的角只有一个，我们用公式

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

如果用公式

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

计算就比较麻烦一些.

习 题 6·9

利用对数计算，解下列各题：

1. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=3019$, $b=6731$, $c=4228$. 解这个三角形.

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=7.440$, $b=9.063$, $c=6.181$. 求 A, B, C.

3. 平行四边形的两边各为 52.1 cm 与 68.5 cm，较短的对角线是 31.6 cm. 求较长的对角线的长.

4. 观看 7 m 长的物体，眼睛和这物体的两端距离是 5 m 和 8 m，求这物体的视角（就是这两条视线间的夹角）.

5. 三角形的三边分别是 242, 188 和 270. 求最大的内角.

§6·10 三角形的面积

应用三角形边角关系的定理，不仅可以根据三角形的已知元素，求出未知的边和角，还可以计算三角形的面积，外接圆半径，内切圆半径等．这一节我们先来研究三角形的面积的求法．

在三角形中，如果

(1) 已知两条边和它们的夹角，

(2) 已知两个角和任意一条边，

(3) 已知三条边，

我们可以求出三角形的面积 Δ．现在来推导这些公式．

1．已知两条边和它们的夹角

假定已知两边 b，c 和它们的夹角 A．我们按照 $\angle A$ 的大小分成下面三种情形来推导．

(1) $\angle A$ 是锐角．作高 CD(图 6·6)，那末

$$\Delta=\frac{1}{2}c\cdot CD.$$

但
$$CD=b\sin A,$$

$$\therefore\quad \Delta=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

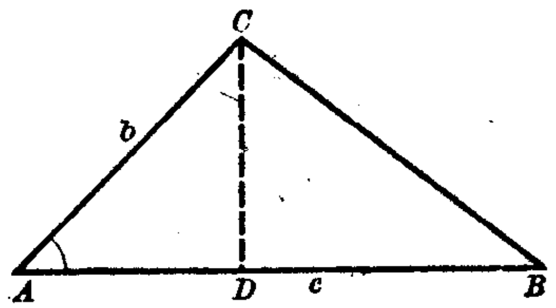


图 6·6

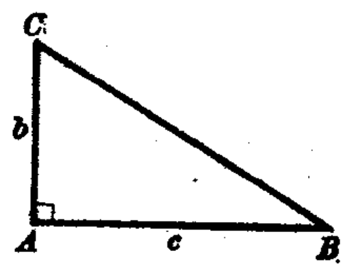


图 6·7

(2) $\angle A$ 是直角．在图 6·7 中，

$$\Delta=\frac{1}{2}bc.$$

因为 $$\frac{1}{2}bc\sin A=\frac{1}{2}bc\sin 90°=\frac{1}{2}bc,$$

所以我们也可以写做

$$\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

(3) $\angle A$ 是钝角．作高 CD，交 c 边的延长线于 D(图 6·8)．那末

$$\Delta=\frac{1}{2}c\cdot CD.$$

但 $$CD=b\sin(180°-A)=b\sin A,$$

$$\therefore\quad \Delta=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

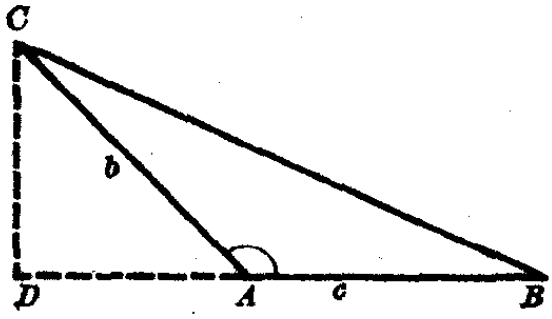


图 6·8

因此，不论 $\angle A$ 是怎样的角，都有

$$\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A.$$

同样可以证明

$$\Delta=\frac{1}{2}ca\sin B,$$

$$\Delta=\frac{1}{2}ab\sin C.$$

2．已知两个角和任意一条边

如果已经知道三角形的两个角，那末第三个角也就可以求出．因此，我们只要导出已知三个角和一条边，求三角形的面积的公式就可以了．

由正弦定理

$$\frac{c}{\sin C}=\frac{a}{\sin A},$$

得 $$c=\frac{a\sin C}{\sin A}.$$

代入公式 $$\Delta=\frac{1}{2}ac\sin B,$$

得 $$\Delta=\frac{1}{2}a\cdot\frac{a\sin C}{\sin A}\cdot\sin B=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A},$$

就是 $$\boldsymbol{\Delta=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin A}}.$$

同样可以知道

$$\boldsymbol{\Delta=\frac{b^2\sin C\sin A}{2\sin B}};$$

$$\boldsymbol{\Delta=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin C}}.$$

作为一个特例，如果知道两个角 A，B 和它们的夹边 c，那末，由于 $\sin C=\sin[180°-(A+B)]=\sin(A+B)$，最后一个公式可以写做

$$\Delta=\frac{c^2\sin A\sin B}{2\sin(A+B)}.$$

3. 已知三条边

在§6·8的例2中，我们已经证明

$$\sin A=\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)},$$

这里 $$s=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

把这个结果代入公式

$$\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A,$$

得 $$\Delta=\frac{1}{2}bc\cdot\frac{2}{bc}\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

就是 $$\boldsymbol{\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}.$$

这个公式最早出现在希腊数学家海伦（约纪元前三世纪到二世纪）所著的书中，所以通常把它叫做**海伦公式**．平面几何学中也可以证明这个公式．但这里的推导过程比较简便．

三角形的面积公式除了上面所得到的以外，我们还可以导出三角形的面积和边，角的其他关系式．

例 求证三角形 ABC 的面积是

$$\Delta=s^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

这里
$$s=\frac{1}{2}(a+b+c).$$

【证】 由半角定理，知道

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad & s^2\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}\\ &=s^2\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}\cdot\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{s(s-b)}}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}\\ &=s^2\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s^3}}\\ &=\sqrt{\frac{s^4}{s^3}(s-a)(s-b)(s-c)}\\ &=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}=\Delta.\end{aligned}$$

这个公式含有三角形的六个元素．我们很少用它来计算三角形的面积．但是在解三角形求出未知元素以后，如果再求出它的面积，那末，就可以代入这个公式来验算答案是否准确．

习 题 6·10

1．在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b=116.1$, $c=100.0$, $A=118°16'$．求它的面积．

2．在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=18.06$, $B=35°$, $C=48°30'$．求它的面积．

3．在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b=62.83\,\text{cm}$, $B=28°19'$, $C=18°1'$．求它

的面积.

4. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $b=28.51\,\text{m}$, $c=40.23\,\text{m}$, $C=77°45'$. 求它的面积.

5. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=23.1\,\text{cm}$, $b=19.7\,\text{cm}$, $c=25.2\,\text{cm}$. 求它的面积.

6. 求证任意四边形的面积，等于两对角线与其夹角正弦的乘积的一半.

7. 求证 $\triangle ABC$ 的面积 $\Delta=s(s-a)\operatorname{tg}\dfrac{A}{2}$.

*8. 设三角形的三边为 $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}$, $\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}$, $\dfrac{z}{x}+\dfrac{x}{y}$. 求证它的面积

$$\Delta=\sqrt{\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}}.$$

§6·11 三角形的外接圆的半径

设 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径是 R. 我们来推导 R 和三角形的边，角的关系. 按照角 A 的大小，可以分成下面三种情形来研究:

(1) $\angle A$ 是锐角: 作外接圆的直径 CD, 并且连结 BD(图 6·9).

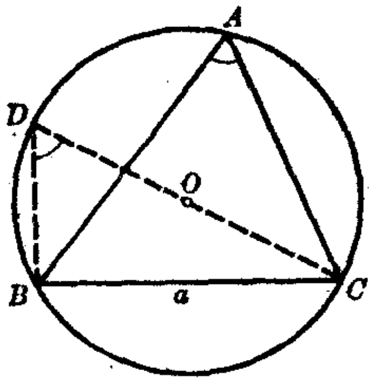


图 6·9

在直角三角形 BCD 中,

$$BC=CD\sin D,$$

就是
$$a=2R\sin D.$$

但
$$\angle D=\angle A,$$

$$\therefore\quad a=2R\sin A.$$

(2) $\angle A$ 是直角: 在图 6·10 中，因为 $\angle A$ 是直角，所以 BC 是圆 O 的直径. 因此,

$$a=2R=2R\sin 90°=2R\sin A.$$

(3) $\angle A$ 是钝角: 作外接圆的直径 CD, 并且连结 BD(图 6·11).

在直角三角形 BCD 中,

$$BC=CD\sin D,$$

就是
$$a=2R\sin D.$$

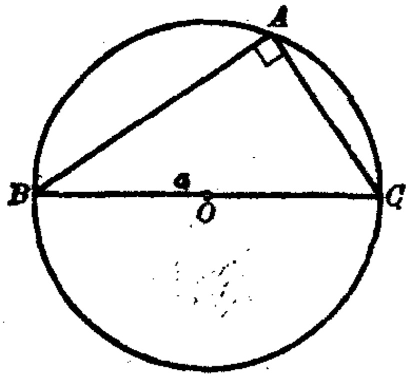


图 6·10

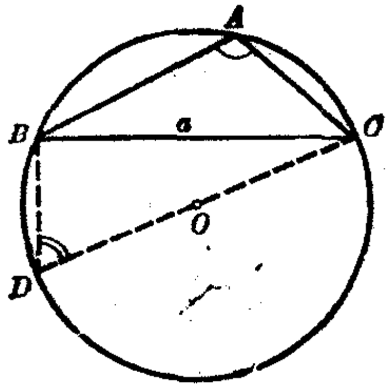


图 6·11

但
$$\angle D=180^\circ-\angle A,$$
$$\therefore\quad \sin D=\sin(180^\circ-A)=\sin A,$$
$$\therefore\quad a=2R\sin A.$$

以上我们对于各种情形证明了
$$a=2R\sin A,$$
因此
$$R=\frac{a}{2\sin A}.$$

同样可以知道
$$R=\frac{b}{2\sin B};\qquad R=\frac{c}{2\sin C}.$$

从上面推证出来的结果，还可以看到
$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}=2R.$$
这就是说，三角形的各边和它的对角的正弦的比都等于外接圆的直径。实际上，我们在这里用另一种方法证明了正弦定理。

例 在 $\triangle ABC$ 中，求证
$$R=\frac{abc}{4\Delta}.$$

【证】 $R=\dfrac{a}{2\sin A}=\dfrac{abc}{2bc\sin A}=\dfrac{abc}{4\times\dfrac{1}{2}bc\sin A}=\dfrac{abc}{4\Delta}.$

习 题 6·11

1. 设 R 是 $\triangle ABC$ 外接圆的半径，求证 $a^2=2R^2(1-\cos 2A)$。

2. 求证 $\Delta=2R^2\sin A\sin B\sin C$.

3. 求证 $a+b+c=8R\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$.

4. 三角形三边的长为 21.2 cm, 32.3 cm 与 40.8 cm. 求它的外接圆的半径.

5. 已知 $a+b+c=420.7$, $A=24°37'$, $B=52°31'$. 求这三角形外接圆的直径和三角形的面积.

6. 三角形的三边 $AB=17.32$ cm, $BC=12.96$ cm, $AC=21.43$ cm. 通过 B, C 的圆的圆心在 AC 上, 求 A 到这圆的圆心的距离.

*7. 求证顶角为 α, 腰长为 m 的等腰三角形的外接圆的半径为 $\frac{1}{2}m\sec\frac{\alpha}{2}$.

§6·12　三角形的内切圆的半径

如图 6·12, 设 $\triangle ABC$ 的内切圆 I 和三条边分别切于 D, E 和 F, r 是内切圆的半径. 连结 IA, IB, IC, ID, IE 和 IF. 从平面几何学中知道, ID, IE 和 IF 分别垂直于 BC, CA 和 AB.

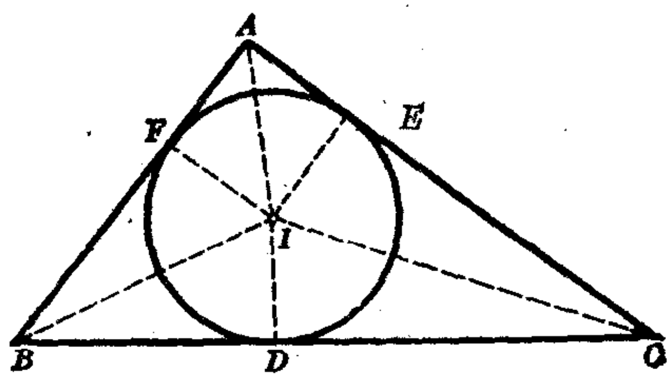


图 6·12

设 Δ 是 $\triangle ABC$ 的面积, 那末

$$\begin{aligned}\Delta&=\triangle IBC+\triangle ICA+\triangle IAB\\&=\frac{1}{2}ID\cdot BC+\frac{1}{2}IE\cdot CA+\frac{1}{2}IF\cdot AB\\&=\frac{1}{2}ra+\frac{1}{2}rb+\frac{1}{2}rc=\frac{1}{2}r(a+b+c)=rs.\end{aligned}$$

因此，
$$r=\frac{\Delta}{s}.$$

但
$$\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

$$\therefore\quad r=\frac{\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}{s}.$$

就是
$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

这是用三角形的边表示内切圆半径的公式.

在半角定理

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{1}{s-b}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{1}{s-c}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$$

中，用 r 代替 $\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$，得

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a};\quad \operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{s-b};\quad \operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{s-c}.$$

因此，

$$r=(s-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(s-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}=(s-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

例 1. 在 $\triangle ABC$ 中，求证

$$r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{b\sin\frac{C}{2}\sin\frac{A}{2}}{\cos\frac{B}{2}}=\frac{c\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}}{\cos\frac{C}{2}}.$$

【证】
$$\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}=\frac{a\sqrt{\frac{(s-c)(s-a)}{ca}}\cdot\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}}{\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}}$$

$$=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}=r.$$

其余两个式子可以同样证明.

例2. 在 $\triangle ABC$ 中,求证

$$r=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

【证】 由例1,

$$r=\frac{a\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}.$$

但 $a=2R\sin A=2R\cdot 2\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}=4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}.$

$$\therefore\quad r=\frac{4R\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}}{\cos\frac{A}{2}}$$

$$=4R\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}.$$

例3. 在 $\triangle ABC$ 中,求证

$$\Delta=Rr(\sin A+\sin B+\sin C).$$

【证】 $Rr(\sin A+\sin B+\sin C)$

$$=\frac{1}{2}r(2R\sin A+2R\sin B+2R\sin C)$$

$$=\frac{1}{2}r(a+b+c)=rs=\Delta.$$

习 题 6·12

1. 设 R 与 r 分别是 $\triangle ABC$ 的外接圆和内切圆的半径,求证:

(1) $abcr=4R(s-a)(s-b)(s-c)$;

(2) $4Rrs=abc$;

(3) $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab}=\frac{1}{2Rr}$;

(4) $\frac{a\cos A+b\cos B+c\cos C}{a+b+c}=\frac{r}{R}.$

2. 三角形三边的长是15.4cm, 18.6cm与25.6cm. 求它的内切圆的半径.

本章提要

1. 正切定理

$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)},$$

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)},$$

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C+A)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C-A)}, \text{等等.}$$

利用对数解已知两边和夹角的三角形,用正切定理.

2. 半角定理

$$\sin\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{bc}},$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{s-a}, \text{等等.}$$

这里,
$$s=\frac{1}{2}(a+b+c),$$

$$r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

利用对数解已知三边的三角形,用半角定理.

3. 三角形的面积

(1) $\Delta=\frac{1}{2}bc\sin A$.

(2) $\Delta=\frac{a^2\sin B\sin C}{2\sin(B+C)}$.

(3) $\Delta=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$.

4. 三角形的外接圆半径

$$R=\frac{a}{2\sin A}=\frac{b}{2\sin B}=\frac{c}{2\sin C}.$$

5. 三角形的内切圆半径

(1) $r=\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$.

(2) $r=(s-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(s-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}=(s-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2}$.

复 习 题 六

利用对数计算,解下列各题:

1. 求 $x=\frac{3\times 2.752^2\sin^2 30°42'}{2\cos 25°28'\operatorname{tg}^2 57°3'}$ 的值.

2. 求 $x=\frac{\cos 29°45'}{1-\cos 21°46'}$ 的值.

3. 求适合等式 $\operatorname{tg}x=1+2\sin 48°16'$ 的锐角 x 的值.

4. 求适合等式 $\operatorname{tg}x=\frac{2\sin^2 39°15'\times 0.0387}{3\cos 72°17'}$ 的锐角x.

5. 根据下列已知条件,解直角三角形:

(1) $c=298$, $A=52°35'$;

(2) $a=401$, $B=52°40'$;

(3) $a=54.3$, $c=72.5$;

(4) $a=1.95$, $b=4.25$.

6. 从圆的直径的一端作长为 39.6 cm 的弦, 它与直径所夹的角是 $44°30'$. 求这圆的半径.

7. 三角形的二边等于 16.2 cm 和 18.9 cm, 这二边间的夹角是 $65°42'$. 求这两边上的高.

8. 已知 $\triangle ABC$ 中，$a+b=1045$，$ab=271700$，$\Delta=18940$，解这个三角形.

[提示：先利用 ab 求出 C，然后用正切定理.]

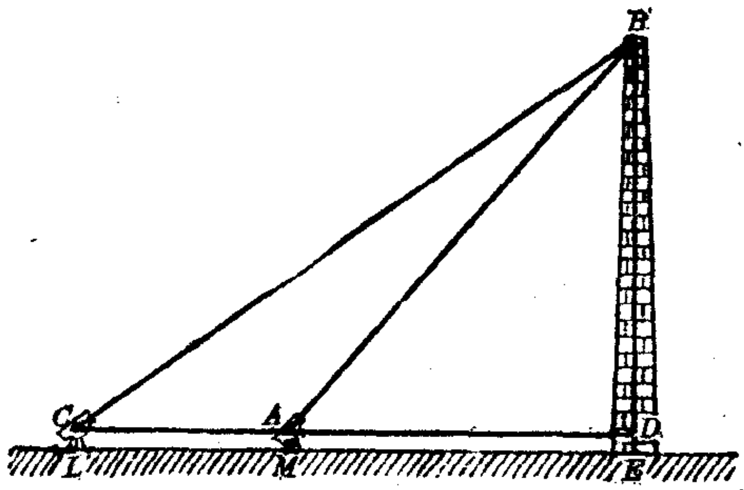
9. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a=274.5$，$A=33°18'$，$C=82°48'$，解这个三角形.

10. 三角形的两边为 5375 cm 和 1587 cm，且知后一边所对的角是 $15°11'$. 求适合于这些条件的三角形的各角.

11. 两条直路相交成 $30°$ 的角；两人 A 与 B 由交点同时出发，A 沿一道以每小时 5 km 的速度步行，B 沿另一道步行，三小时后两人相距 9 km. 试求适合于此条件的 B 的两个速度.

12. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $A=10°$，$a=2309$，$b=7903$. 求适合于此条件的较小的 c 边.

13. 要测底部不能到达的烟囱的高度，在过烟囱底部的水平直线上，放置测角器 AM 和 CL，测得 $\angle BAD=49°$，$\angle BCD=35°$. 如果 ML 的长是 11 m，测角器的高是 1.37 m，求烟囱的高度（精确到 0.1 m）.

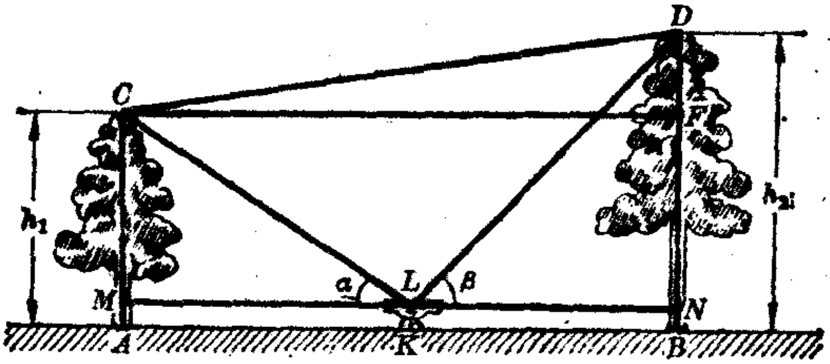


（第 13 题）

14. 在 $\triangle ABC$ 中，$a=12.4$，$B=45°10'$，$C=70°10'$，求 b 边和外接圆的半径 R（精确到 0.01）.

15. 菱形的一角为 $37°25'$，两对角线的和为 465 cm，求它的边长（精确到 0.1 cm）.

16. 平地上两树的高 $h_1=41.25\,\mathrm{m}$, $h_2=64\,\mathrm{m}$. 在两树基的联线上某点 K, 利用测角器从 L 测得两树顶端的仰角 $\alpha=32°30'$, $\beta=44°12'$. 求两树顶端间的距离. 测角器的高 $KL=1.2\,\mathrm{m}$(精确到 $0.1\,\mathrm{m}$).



(第 16 题)

17. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $b=517.1\,\mathrm{cm}$, $c=862.3\,\mathrm{cm}$, 而 A 适合等式 $\cos A+\sin A=1.375$. 计算 B, C, a 和 Δ.

18. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知 $a+b=2147$, $c=353$, $C=13°41'$. 用模尔外得公式求 A, B; 并求 a, b 和它的面积.

第七章　反三角函数

§7·1 反　函　数

在前面两章中，我们看到，解三角形求未知角的时候，我们总是先求出某一个角的一个三角函数，然后根据这个三角函数的值，求出未知角的度数．例如，已知两边 a, b 和角 A，应用正弦定理求角 B 时，我们先由 $\sin B=\dfrac{b\sin A}{a}$ 算出等式右边的值，然后查表得到角 B 的度数．

但是，对某一个问题，要寻求普遍性的解答的时候，我们常常会遇到用字母表示已知的三角函数值的式子，比方说，$\sin x=m$，这里 m 代表一个已知的数．这时，要写出角 x 的度数是不可能的，只能用 m 表示角 x．下面我们就来研究怎样用 m 表示角 x．

我们知道，如果有两个量，当一个量取某一个固定的值的时候，另一个量就相应地取确定的数值，当第一个量变化的时候，第二个量也相应地变化，那末第二个量是第一个量的函数，第一个量是自变量．

但是互相关联的两个量中间，把哪一个看做自变量，并不是绝对的．例如，每立方厘米的铁重 7.8 克．设 x 立方厘米的铁重 y 克，那末

$$y=7.8x.$$

用这个公式，知道了铁的体积，可以求得铁的重量．这

时，我们把铁的重量 y 看做是它的体积 x 的函数，x 是自变量.

反过来，知道了铁的重量 y，也可以求铁的体积 x. 它们之间的关系是

$$x=\frac{y}{7.8}.$$

这时，我们把铁的体积 x 看做是它的重量 y 的函数，y 是自变量.

从这个例子可以看到，由于考虑问题的出发点不同，不仅可以把铁的重量看做是它的体积的函数，也可以把铁的体积看做是它的重量的函数.

一般地说，对于函数 $y=f(x)$，如果把 y 看做自变量，并且对于 y 的每一个可以取的值，x 有唯一确定的值和它对应时，我们就把新的函数 $x=\varphi(y)$ 叫做 $y=f(x)$ 的**反函数**.

在上面的例子中，$x=\frac{y}{7.8}$ 就是 $y=7.8x$ 的反函数.

又例如 $y=2x+1$ 的反函数是 $x=\frac{y-1}{2}$.

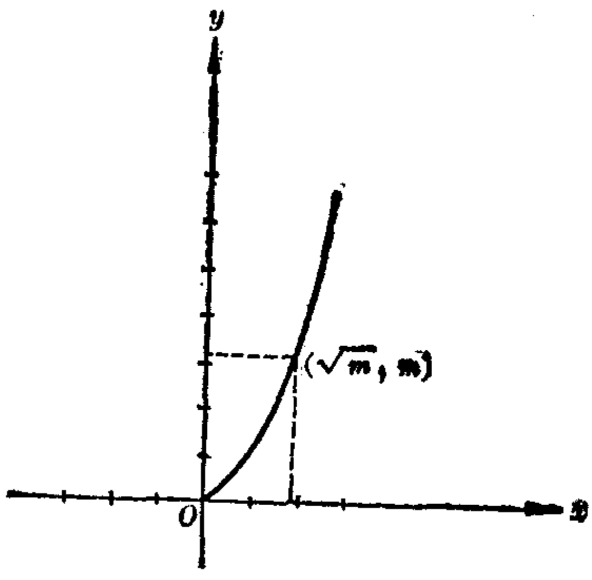


图 7·1

对于函数 $y=x^2$ 来说，情形有些不同. 当 y 取某一个正值的时候，在全体实数中，对应的 x 值不是一个而是两个. 我们通常说：在全体实数的范围内，x 不是 y 的函数. 但是我们可以缩小 $y=x^2$ 的定义域，使它只包含零和一切正数. 这时，无论 y 等于

哪一个正数 m，对应的 x 只有一个值 $\sqrt{m}$.

函数 $y=x^2$ 在 $x\geqslant 0$ 的范围内的图象是半条抛物线(图7·1). 从图象上可以看到，一点的纵坐标确定后，横坐标是唯一确定的. 这就说明，函数 $y=x^2$ 在缩小了的定义域 $x\geqslant 0$ 的范围内，x 可以看做是 y 的函数. 它们之间的关系是

$$x=+\sqrt{y}.$$

在这种情形，我们说，$x=+\sqrt{y}$ 是函数 $y=x^2$ 在 $x\geqslant 0$ 的区间内的反函数.

习　题　7·1

1. 已知圆的面积 A 是半径 r 的函数: $A=\pi r^2$, r 是 A 的函数吗? 为什么?

2. 把下列各函数写成 $x=\varphi(y)$ 的形式:

(1) $y=\sqrt{2}x-\pi$;　　(2) $y=3x^3+7$;

(3) $y=2^x+3$;　　(4) $y=\lg(x+\sqrt{5})$.

3. 在 $x\leqslant 0$ 的范围内，求函数 $y=x^2$ 的反函数.

§7·2　反　正　弦

现在来看等式 $\sin x=m(|m|\leqslant 1)$. 我们知道，正弦等于某一个已知数 m 的角有无数个. 例如当 $\sin x=\frac{1}{2}$ 时，x 可以是 $30°$, $150°$ 以及这两个角加上或者减去 $360°$ 的任何整数倍所得的角. 用弧度来表示，就是 $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, 以及这两个角加上或者减去 2π 的任何整数倍所得的角.

我们可以画出 $y=\sin x$ 的图象来看这个事实. 在图7·2中，作和 x 轴平行的直线 $y=\frac{1}{2}$. 这条直线将和 $y=\sin x$ 的图

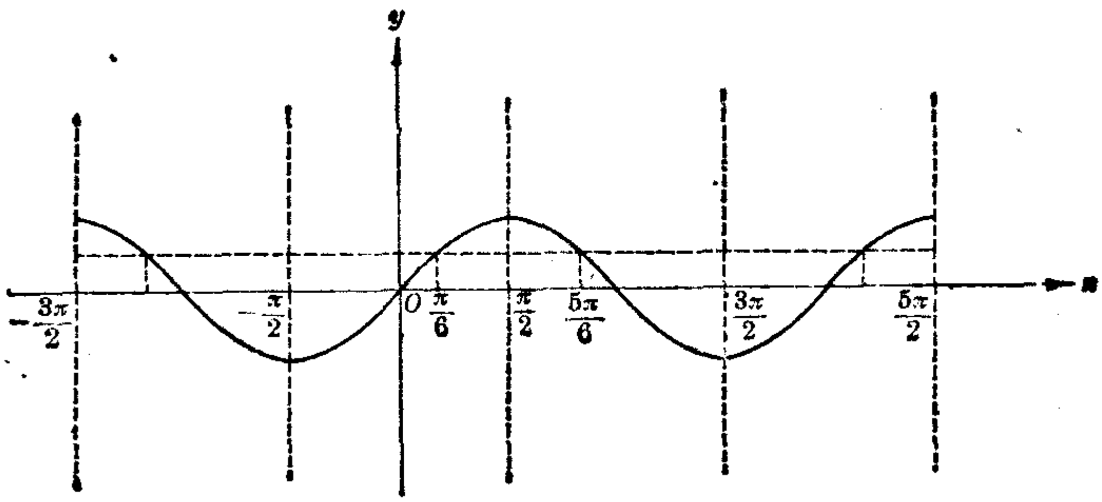


图 7·2

象相交于无数个点，每一个交点的横坐标都是适合于 $\sin x=\frac{1}{2}$ 的 x 的值.

由于 $y=\sin x$ 的图象是波浪式的曲线，因此，平行于 x 轴的直线如果和它相交，那就必然有无数个交点. 但是，我们可以把全体实数划分成许多区间，使每一个区间内 $\sin x$ 的值递增或者递减，如图 7·2 中竖的虚线所表示的. 这样，在每一个区间内，直线 $y=\frac{1}{2}$ 和函数 $y=\sin x$ 的图象就只有一个交点. 这也就是说，在这样的每一个区间内，我们都可以求出函数 $\sin x$ 的反函数.

因为，我们最常用到的角是 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 间的角. 所以在求三角函数的反函数的时候，我们通常都选取包含着 0 到 $\frac{\pi}{2}$ 的这个区间.

我们可以看到，对于正弦函数来说，这样的区间就是闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. 在这个区间内，直线 $y=\frac{1}{2}$ 和函数 $y=\sin x$

的图象只有一个交点，这个交点的横坐标是 $\frac{\pi}{6}$. 这说明，当 $\sin x=\frac{1}{2}$ 时，从 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 的 x 的值是 $\frac{\pi}{6}$. 我们把 x 的这个值写做 $\arcsin\frac{1}{2}$. 换句话说，$\arcsin\frac{1}{2}$ 是从 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一个角，它的正弦等于 $\frac{1}{2}$.

一般地说，当 $\sin x=m(|m|\leqslant 1)$ 时，从 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 的 x 的值叫做 m 的**反正弦**，用 $\arcsin m$ 来表示. 这也就是说，$\arcsin m$ $(|m|\leqslant 1)$ 表示从 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一个角，它的正弦等于 m. 用式子来表示，就是

$$\sin(\arcsin m)=m,\ -\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin m\leqslant\frac{\pi}{2}(|m|\leqslant 1).$$

例 求下列反正弦的值:

(1) $\arcsin 0.6536$; (2) $\arcsin 1$;

(3) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; (4) $\arcsin(-0.4189)$.

【解】 (1) $\arcsin 0.6536$ 表示从 -90° 到 90° 的一个角，它的正弦等于 0.6536. 查表得

$$\sin 40^\circ 49'=0.6536,$$

$$\therefore\quad \arcsin 0.6536=40^\circ 49'.$$

(2) 从 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 正弦等于 1 的角是 $\frac{\pi}{2}$. 因此，

$$\arcsin 1=\frac{\pi}{2}.$$

(3) 正弦等于$\frac{\sqrt{3}}{2}$ 的锐角是 $\frac{\pi}{3}$. 因为

$$\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)=-\sin\frac{\pi}{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2},$$

所以从$-\frac{\pi}{2}$到$\frac{\pi}{2}$正弦等于$-\frac{\sqrt{3}}{2}$的角是$-\frac{\pi}{3}$. 因此，

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}.$$

(4) 查表得 $\sin 24°46'=0.4189$. 因为 $\sin(-24°46')=-\sin 24°46'=-0.4189$, 所以从 $-90°$ 到 $90°$ 正弦等于 -0.4189 的角是 $-24°46'$.

$$\therefore\quad \arcsin(-0.4189)=-24°46'.$$

由于三角函数 $y=\sin x$ 当 y 取 -1 到 $+1$ 的一个值的时候，对应的 x 值有无数个，所以我们也只能考虑它在某一个区间内的反函数.

从上面所说的，如果把 $y=\sin x$ 的定义域缩小成$-\frac{\pi}{2}$到$\frac{\pi}{2}$的一个区间. 那末在这个区间内，当 y 取某一个值 $m(|m|\leqslant 1)$ 的时候，对应的 x 的值只有一个，并且这个值可以用反正弦 $\arcsin m$ 来表示(图 7·3). 因此，对于 y 的任意一个从-1到$+1$的值来说，

$$x=\arcsin y.$$

这就是说，函数 $y=\sin x$ 在 $\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$这个区间内的反函数是

$$x=\arcsin y,$$

我们把它叫做**反正弦函数**.

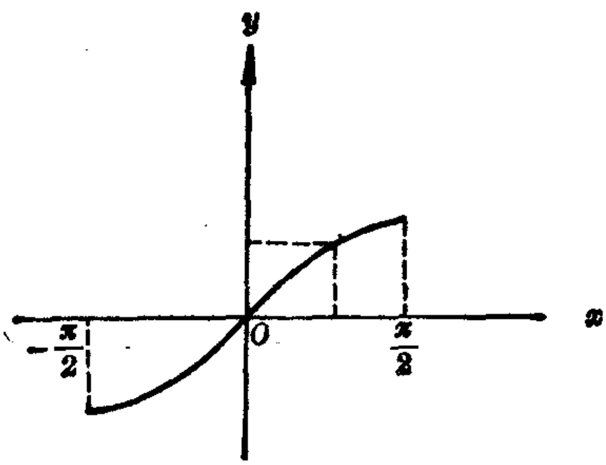


图 7·3

在反正弦函数 $x=\arcsin y$ 中，自变量 y 是从-1到$+1$间的任意一个数，函数 x

是正弦等于 y 并且在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 这个区间内的角．因此，反正弦函数的定义域是

$$-1\leqslant y\leqslant 1;$$

函数值所在的范围是

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}.$$

因为在反正弦函数 $x=\arcsin y$ 中，x 和 y 的关系是

$$y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}\right),$$

所以 $y=\sin x$ 从 $-\frac{\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$ 的一段图象同时也是 $x=\arcsin y$ 的图象（图 7·3）．但是曲线上的点的横坐标对于正弦函数 $y=\sin x$ 来说是自变量，对于反正弦函数 $x=\arcsin y$ 来说是函数；曲线上的点的纵坐标对于正弦函数来说是函数，对于反正弦函数来说是自变量．

习惯上，我们总是用字母 x 表示自变量，用字母 y 表示函数的．观察图象的时候，也习惯于把点的横坐标看做是自变量的值，纵坐标看做是函数的值．

为了符合习惯，我们把反正弦函数写成

$$y=\arcsin x.$$

这样一来，y 就是正弦等于 x 并且在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 这个区间内的角．换句话说，x 和 y 间的关系是

$$x=\sin y\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant \frac{\pi}{2}\right).$$

所以，要画出 $y=\arcsin x$ 的图象，只要作 $x=\sin y$ 从 $-\frac{\pi}{2}$ 到

$\frac{\pi}{2}$ 的一段图象就可以了．我们列出下面的数值表：

y	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{6}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
x	-1	-0.87	-0.50	0	0.50	0.87	1

把每一组值作为点的坐标，得到图 7·4 的曲线．它就是函数 $y=\arcsin x$ 的图象．

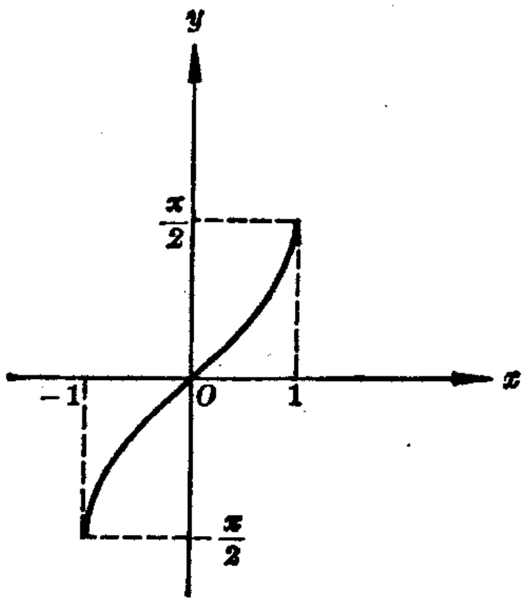


图 7·4

习 题 7·2

1．求下列反正弦的值：

(1) $\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}$；　　(2) $\arcsin 0$；

(3) $\arcsin(-1)$；　　(4) $\arcsin(-0.2672)$．

2．用反正弦表示适合于下列各式的角 $x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$：

(1) $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{4}$；　　(2) $\sin x=0.8715$；

(3) $2\sin x=-\frac{3}{5}$;　　(4) $\sin x=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

3. 计算下列各式的值:

(1) $2\arcsin\frac{1}{2}$;　　(2) $\frac{\pi}{4}+\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$;

(3) $\frac{1}{3}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$;

(4) $\arcsin 0.3144+\arcsin(-0.3144)$;

(5) $-\arcsin(-1)$;

(6) $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$.

4. 写出下列各式的值:

(1) $\sin(\arcsin 0.8239)$;　　(2) $\sin\left(\arcsin\frac{\sqrt{7}}{5}\right)$;

(3) $\sin[\arcsin(-0.1221)]$;　　(4) $\sin\left[\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{4}\right)\right]$.

5. $\arcsin\sqrt{2}$有没有意义?为什么?

6. 在直角三角形 ABC 中，斜边是 c，两条直角边是 a 和 b. 用反正弦表示锐角 A 和 B.

7. 写出下列各函数的定义域:

(1) $y=\arcsin 2x$;　　(2) $y=\arcsin\sqrt{x}$;

(3) $y=\sqrt{\arcsin x}$;　　(4) $y=\arcsin\frac{1}{x}$.

8. 作出 $y=\arcsin 2x$ 的图象，并与 $y=\arcsin x$ 的图象作比较，它们的区别在哪里?

§7·3 反余弦

从余弦函数 $y=\cos x$ 的图象(图 7·5)可以看到，当 $\cos x$ 等于某一个已知数 m 的时候，对应的 x 值有无数个. 例如，作和 x 轴平行的直线 $y=\frac{1}{2}$，这条直线将与 $y=\cos x$ 的图象相

交于无数个点．这说明当 $\cos x=\frac{1}{2}$ 时，对应的 x 值有无数个．

但是，如果将全体实数划分成许多区间，使每一个区间内余弦函数的值递增或者递减，如图 7·5 中竖的虚线所表示的．那末，在每一个区间内，直线 $y=\frac{1}{2}$ 和函数 $y=\cos x$ 的图象就只有一个交点．

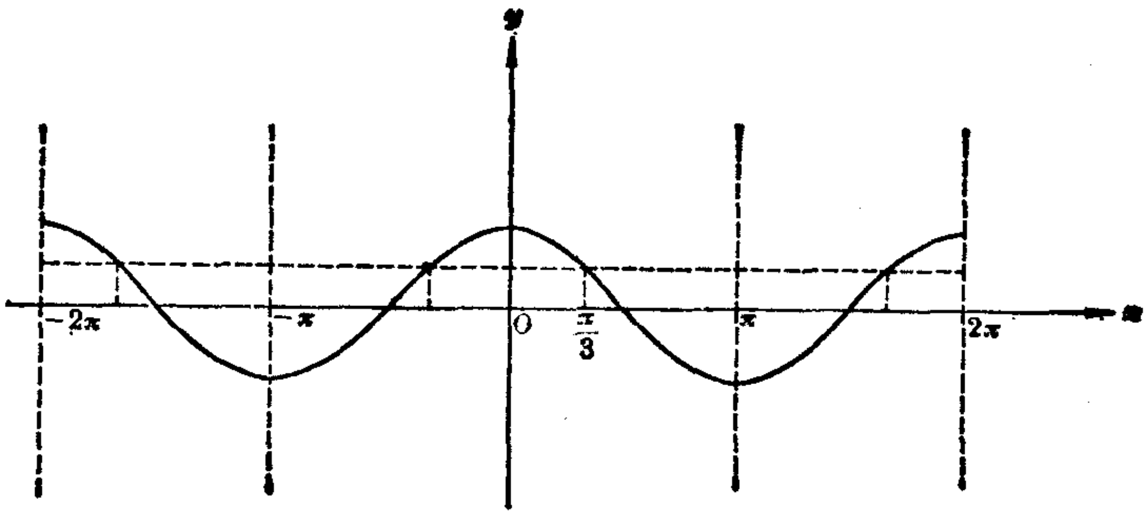


图 7·5

注意从 0 到 π 的一个区间，在这个区间内，适合于 $\cos x=\frac{1}{2}$ 的 x 的值是 $\frac{\pi}{3}$．我们把 x 的这个值写做 $\arccos\frac{1}{2}$．换句话说，$\arccos\frac{1}{2}$ 是从 0 到 π 的一个角，它的余弦等于 $\frac{1}{2}$．

一般地说，当 $\cos x=m\,(|m|\leqslant 1)$ 时，从 0 到 π 的 x 的值叫做 m 的反余弦，用 $\arccos m$ 来表示．这就是说，$\arccos m$ $(|m|\leqslant 1)$ 表示从 0 到 π 的一个角，它的余弦等于 m．用式子来表示，就是

$$\cos(\arccos m)=m,\ 0\leqslant\arccos m\leqslant\pi\ (|m|\leqslant 1).$$

例 求下列反余弦的值:

(1) $\arccos\frac{3}{4}$; (2) $\arccos 0$;

(3) $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$; (4) $\arccos(-0.1543)$.

【解】 (1) 查表得 $\cos 41°25'=0.7500=\frac{3}{4}$. 所以从 $0°$ 到 $180°$ 之间,余弦等于$\frac{3}{4}$的角是 $41°25'$. 因此,

$$\arccos\frac{3}{4}=41°25'.$$

(2) 从 0 到 π 余弦等于 0 的角是 $\frac{\pi}{2}$. 因此,

$$\arccos 0=\frac{\pi}{2}.$$

(3) 余弦等于 $\frac{1}{2}$ 的锐角是 $\frac{\pi}{3}$. 因为 $\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$, 所以从 0 到 π 余弦等于 $-\frac{1}{2}$ 的角是 $\pi-\frac{\pi}{3}$, 就是 $\frac{2\pi}{3}$. 因此,

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{2\pi}{3}.$$

(4) 查表得 $\cos 81°6'=0.1543$. 因为 $\cos(180°-81°6')=-\cos 81°6'=-0.1543$, 所以从 $0°$ 到 $180°$ 余弦等于 -0.1543 的角是 $180°-81°6'$, 就是 $98°54'$. 因此,

$$\arccos(-0.1543)=98°54'.$$

因为余弦函数 $y=\cos x$ 中当 y 取从 -1 到 $+1$ 的某一个值 m 的时候, 在 $[0, \pi]$ 这个区间内 , x 有确定的值, 并且这个值可以记做 $\arccos m$(图 7·6), 所以对于 y 的每一个从 -1 到

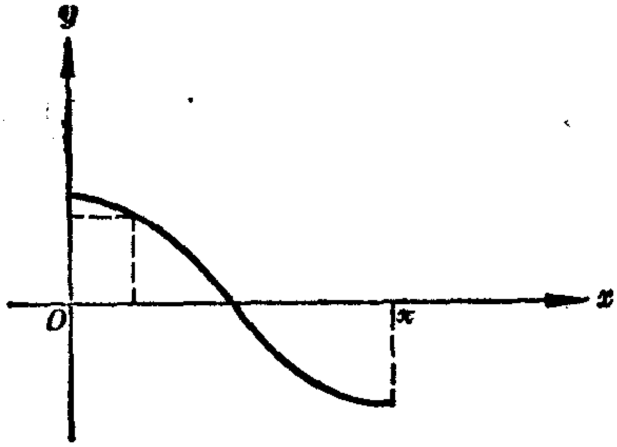


图 7·6

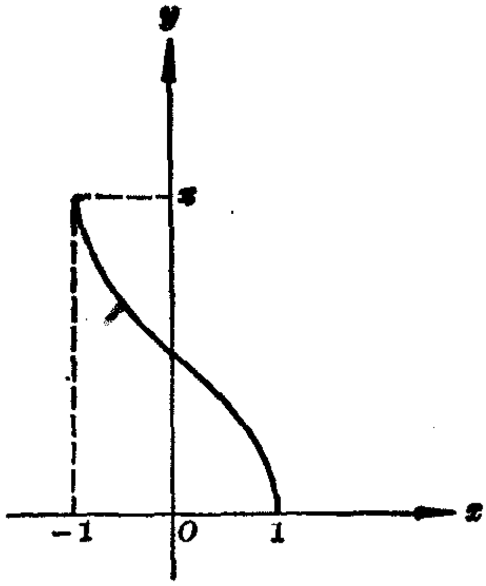


图 7·7

+1 的值，在 $[0, \pi]$ 这个区间内，都有

$$x=\arccos y,$$

这就是说，$x=\arccos y$ 是余弦函数 $y=\cos x$ 在 $[0, \pi]$ 这个区间内的反函数. 我们把它叫做**反余弦函数**. 它的定义域是

$$-1\leqslant y\leqslant 1,$$

它的函数值的范围是

$$0\leqslant x\leqslant \pi.$$

如果自变量用 x 来表示，函数用 y 来表示，那末反余弦函数可以写成

$$y=\arccos x.$$

这里，y 是余弦等于 x 并且在 $[0, \pi]$ 这个区间内的角，就是

$$x=\cos y\,(0\leqslant y\leqslant \pi).$$

因此，要作 $y=\arccos x$ 的图象，只要作 $x=\cos y$ 从 0 到 π 的一段图象就可以了(图 7·7).

习 题 7·3

1．求下列反余弦的值：

(1) $\arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$；　　(2) $\arccos 0.5125$；

(3) $\arccos(-0.8617)$；　　(4) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

2．用反余弦表示适合于下列各式的角 $x(0\leqslant x\leqslant\pi)$：

(1) $\cos x=\frac{1}{3}$；　　(2) $\cos x=0.3179$；

(3) $\cos x=-\frac{\sqrt{2}}{4}$；　　(4) $3\cos x=-2$；

(5) $\cos x=\frac{2ab}{a^2+b^2}$.

3．写出下列各式的值：

(1) $\cos(\arccos 0.7717)$；　　(2) $\cos\left(\arccos\frac{12}{13}\right)$；

(3) $\cos(\arccos 1)$；　　(4) $\cos\left[\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\right]$；

(5) $\cos[\arccos(-0.5)]$.

4．计算下列各式的值：

(1) $3\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$；

(2) $\arccos 0.2157+\arccos(-0.2157)$；

(3) $-\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$；　　(4) $\pi-\arccos(-1)$；

(5) $\frac{\pi}{2}+\arccos 0$.

5．求下列各式的值：

(1) $\arcsin 1+\arccos 1$；　　(2) $\arcsin(-1)+\arccos 0$；

(3) $2\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+\arccos(-1)$；

(4) $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)+\arccos\frac{\sqrt{3}}{2}$.

6. 证明下列各等式:

(1) $\arcsin\left(\sin\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{\pi}{3}$;　　(2) $\arccos\left(\cos\frac{9\pi}{4}\right)=\frac{\pi}{4}$;

(3) $4\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2}=3\arccos\frac{1}{2}$.

7. $\arccos 2$ 有没有意义?为什么?

8. a 在什么区间内, $\arccos(1-a)$才有意义?

9. 写出下列各函数的定义域和函数值的范围:

(1) $y=\arccos\frac{x}{3}$;　　(2) $y=2\arccos\sqrt{x-1}$;

(3) $y=\frac{1}{3}\arccos(-x^2)$.

10. 作出 $y=2\arccos\frac{x}{2}$ 的图象.

11. 作出 $y=-\arccos x$ 的图象, 并与 $y=\arccos(-x)$ 的图象作比较,它们有什么区别?

§7·4 反 正 切

当 $\operatorname{tg} x$ 等于某一个已知数 m 的时候, 对应的 x 的值也有无数个. 从正切函数 $y=\operatorname{tg} x$ 的图象上可以看到, 和 x 轴平行的任意一条直线 $y=m$ 与 $y=\operatorname{tg} x$ 的图象相交于无数个点(图 7·8).

但是在正切函数的每一个单调区间,例如$\left(-\frac{3\pi}{2}, -\frac{\pi}{2}\right)$, $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, $\left(\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right)$内, 直线 $y=m$ 与 $y=\operatorname{tg} x$ 的图象都只相交一次. 所以在正切函数的每一个单调区间内, 适合于 $\operatorname{tg} x=m$ 的 x 有唯一确定的值. 我们把适合于 $\operatorname{tg} x=m$ 并且在$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$这个区间内的 x 的值叫做 m 的**反正切**, 用 $\operatorname{arc\,tg} m$ 来表示. 换句话说, $\operatorname{arc\,tg} m$ 是正切等于 m 并且在

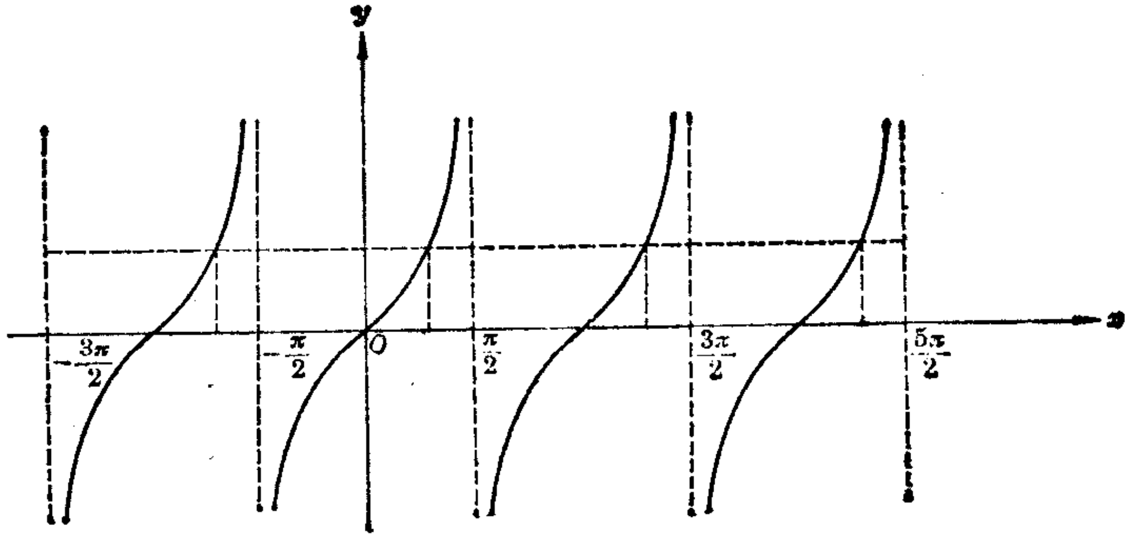


图 7·8

$-\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 间的一个角．用式子来表示，就是

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} m)=m,\ -\frac{\pi}{2}<\operatorname{arc\,tg} m<\frac{\pi}{2}.$$

例 求下列反正切的值：

(1) $\operatorname{arc\,tg} 1$; (2) $\operatorname{arc\,tg} 3.471$;

(3) $\operatorname{arc\,tg}(-0.5348)$.

【解】 (1) 在 $-\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 间，正切等于1的角是 $\frac{\pi}{4}$．因此，

$$\operatorname{arc\,tg} 1=\frac{\pi}{4}.$$

(2) 查表得 $\operatorname{tg} 73°56'=3.471$．所以在 $-90°$ 和 $90°$ 之间，正切等于 3.471 的角是 $73°56'$．因此，

$$\operatorname{arc\,tg} 3.471=73°56'.$$

(3) 查表得 $\operatorname{tg} 28°8'=0.5348$．因为 $\operatorname{tg}(-28°8')=-\operatorname{tg} 28°8'=-0.5348$，所以在 $-90°$ 和 $90°$ 之间正切等于

-0.5348 的角是 $-28°8'$. 因此,

$$\operatorname{arc\,tg}(-0.5348)=-28°8'.$$

因为正切函数 $y=\operatorname{tg}x$ 取某一个值 m 的时候, 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 这个区间内, x 有确定的值, 并且这个值可以记做 $\operatorname{arc\,tg}m$ (图 7·9), 所以对于 y 的任何一个值, 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 这个区间内,

$$x=\operatorname{arc\,tg}y.$$

因此, $x=\operatorname{arc\,tg}y$ 是正切函数 $y=\operatorname{tg}x$ 在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 区间内的反函数. 我们把它叫做**反正切函数**. 它的定义域是一切实数, 也就是

$$-\infty<y<\infty,$$

它的函数值的范围是

$$-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}.$$

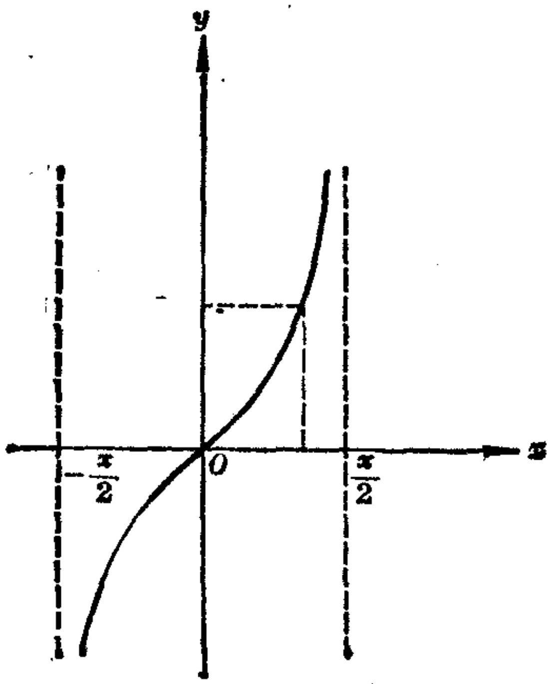


图 7·9

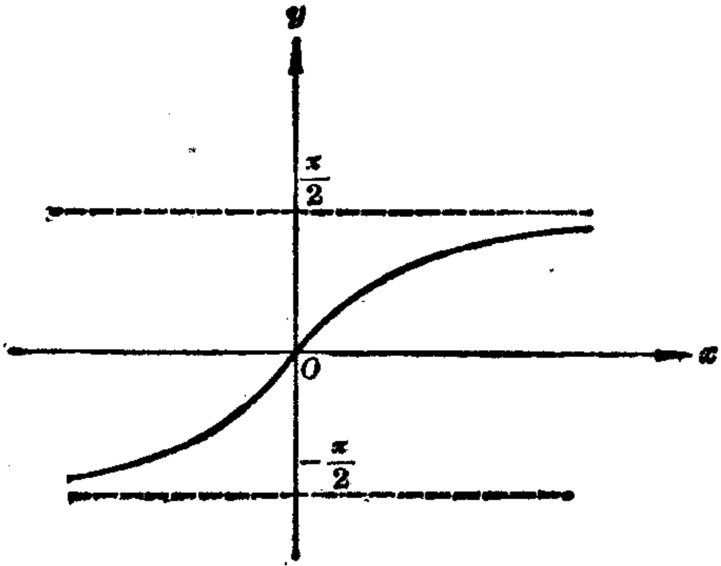


图 7·10

如果自变量用 x 来表示，函数用 y 来表示，那末反正切函数可以写成

$$y=\operatorname{arc\,tg} x.$$

这里，y 是正切等于 x 并且在 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 区间内的角，就是

$$x=\operatorname{tg} y \left(-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}\right).$$

因此，要作 $y=\operatorname{arc\,tg} x$ 的图象，只要作 $x=\operatorname{tg} y$ 在 $-\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{2}$ 间的一段图象就可以了(图 7·10)。

习　题　7·4

1. 求下列反正切的值:

(1) $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}$;　　(2) $\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$;

(3) $\operatorname{arc\,tg}(-1)$;　　(4) $\operatorname{arc\,tg} 0$;

(5) $\operatorname{arc\,tg} 2.134$;　　(6) $\operatorname{arc\,tg}(-0.9752)$.

2. 用反正切表示适合于下列各式的角 $x\left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right)$:

(1) $\operatorname{tg} x=\frac{7}{5}$;　　(2) $\operatorname{tg} x=\sqrt{2}$;

(3) $\operatorname{tg} x=-\pi$;　　(4) $a \operatorname{tg} x=b$;

(5) $\operatorname{tg} x=-\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$.

3. 写出下列各式的值:

(1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arc tg} 1.412)$;　　(2) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc tg}\frac{\sqrt{5}}{2}\right)$;

(3) $\operatorname{tg}[\operatorname{arc tg}(-2)]$;　　(4) $\operatorname{tg}[\operatorname{arc tg}(-1.142)]$;

(5) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc tg}\frac{2a}{b}\right)$.

4. 计算下列各式的值:

(1) $3\operatorname{arc tg}\frac{1}{\sqrt{3}}$;　　(2) $2\operatorname{arc tg} 1+\arccos 0$;

(3) $\arccos 1+2\arcsin\frac{1}{2}+\operatorname{arc tg}(-\sqrt{3})$;

(4) $\operatorname{arc tg} 0.8195+\operatorname{arc tg}(-0.8195)$;

(5) $3\operatorname{arc tg}(-1)+\frac{3\pi}{4}$.

5. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知三边为 a, b, c. 试用反正切表示 $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$.

6. 证明下列各等式:

(1) $\operatorname{arc tg}\left(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{\pi}{4}$;　　(2) $\operatorname{arc tg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{6}\right)=\frac{\pi}{6}$;

(3) $\operatorname{arc tg}\left(\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}\right)=2\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)$;

(4) $\operatorname{arc tg}\left(\operatorname{tg}\frac{7\pi}{4}\right)=\arcsin\left(\sin\frac{5\pi}{4}\right)$.

7. 求下列各函数的定义域:

(1) $y=\operatorname{arc tg}\sqrt{x-5}$;　　(2) $y=\operatorname{arc tg}\frac{1}{x-1}$;

(3) $y=\arcsin\frac{2}{x}+\operatorname{arc tg}\frac{2}{x}$.

*8. $y=|\operatorname{arc tg} x|$ 的图象和 $y=\operatorname{arc tg}|x|$ 的图象有区别吗?为什么?

§7·5 反 余 切

当 $\mathrm{ctg}\,x$ 等于某一个值 m 的时候，x 也有无数个值和它对应(图 7·11)。

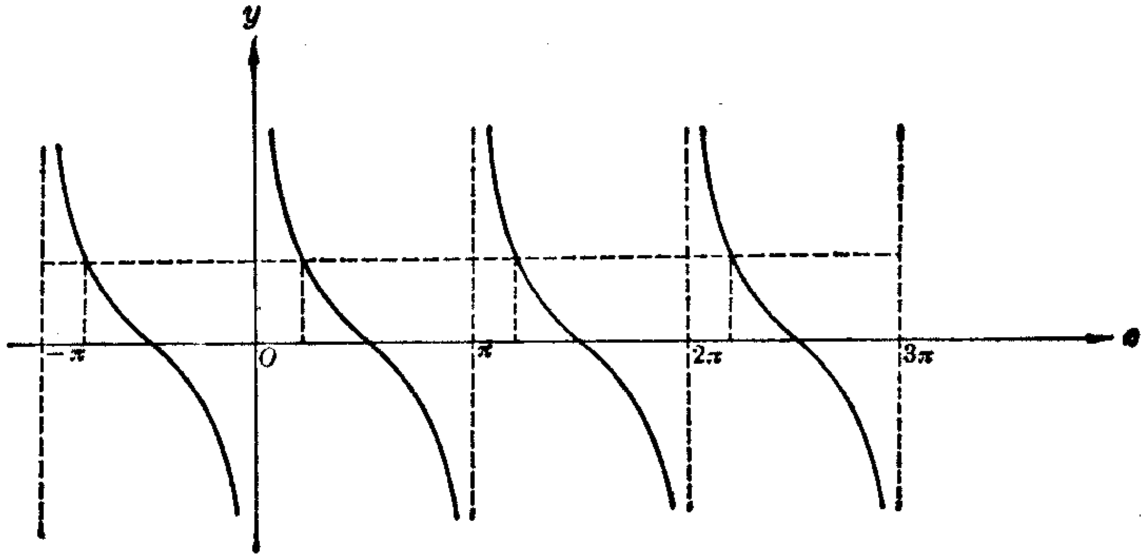


图 7·11

但是在余切函数的每一个单调区间…, $(-\pi,0)$, $(0,\pi)$, $(\pi, 2\pi)$, …内，对于 $\mathrm{ctg}\,x$ 的每一个值，x 都只有一个确定的值和它对应．我们把适合于 $\mathrm{ctg}\,x=m$ 并且在 $(0, \pi)$ 这个区间内的 x 的值叫做 m 的反余切，用 $\mathrm{arcctg}\,m$ 来表示．换句话说，$\mathrm{arcctg}\,m$ 是余切等于 m 并且在 0 和 π 间的一个角．用式子来表示，就是

$$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}\,m)=m,\ 0<\mathrm{arcctg}\,m<\pi.$$

例 求下列反余切的值:

(1) $\mathrm{arcctg}\,0.5820$;　　　(2) $\mathrm{arcctg}(-2.835)$.

【解】 (1) 查表得 $\mathrm{ctg}\,59°48'=0.5820$．所以在 0° 和 180° 之间，余切等于 0.5820 的角是 $59°48'$．因此，

$$\operatorname{arc\,ctg} 0.5820 = 59°48'.$$

(2) 查表得 $\operatorname{ctg} 19°26' = 2.835$. 因为 $\operatorname{ctg}(180° - 19°26') = -\operatorname{ctg} 19°26' = -2.835$, 所以在 0° 和 180° 之间，余切等于 -2.835 的角是 $180° - 19°26' = 160°34'$. 因此，

$$\operatorname{arc\,ctg}(-2.835) = 160°34'.$$

因为在 $(0, \pi)$ 这个区间内，函数 $y = \operatorname{ctg} x$ 取某一个值 m 的时候，x 有确定的值 $\operatorname{arc\,ctg} m$ 和它对应(图7·12)，所以

$$x = \operatorname{arc\,ctg} y$$

是余切函数 $y = \operatorname{ctg} x$ 在 $(0, \pi)$ 这个区间内的反函数. 我们把它叫做**反余切函数**. 它的定义域是

$$-\infty < y < \infty,$$

它的函数值的范围是

$$0 < x < \pi.$$

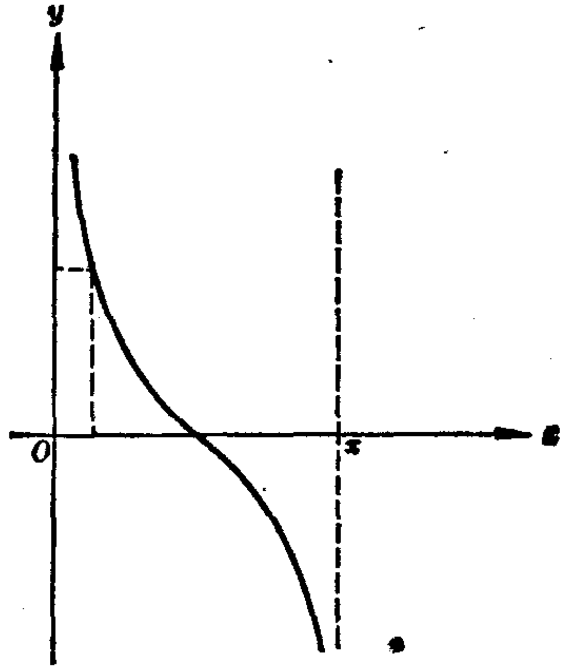


图 7·12

如果自变量用 x 来表

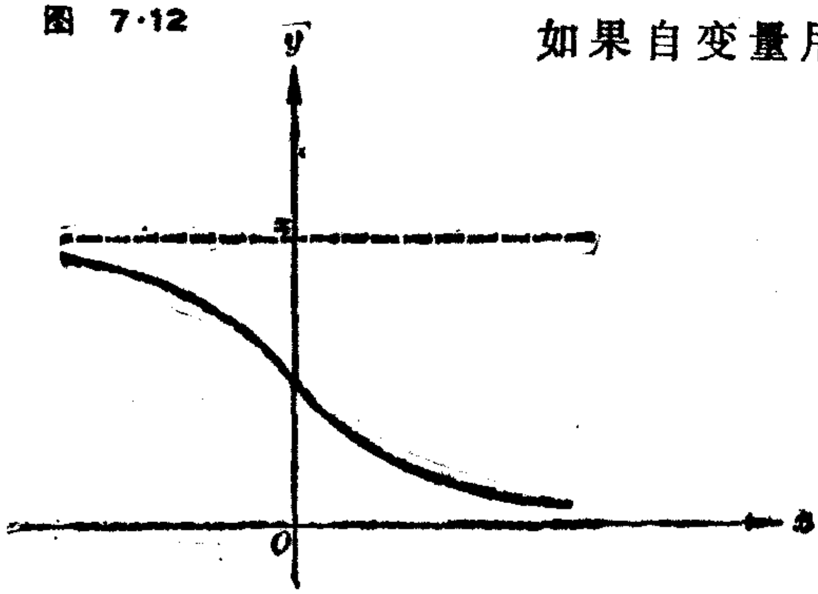


图 7·13

示，函数用 y 来表示，那末反余切函数可以写成

$$y=\operatorname{arc\,ctg} x.$$

要作 $y=\operatorname{arc\,ctg} x$ 的图象，只要作 $x=\operatorname{ctg} y$ 在 0 和 π 间的一段图象就可以了(图 7·13)。

习 题 7·5

1．求下列反余切的值：

(1) $\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{3}$;　(2) $\operatorname{arc\,ctg}(-1)$;

(3) $\operatorname{arc\,ctg} 0$;　(4) $\operatorname{arc\,ctg} 0.8215$;

(5) $\operatorname{arc\,ctg}(-1.956)$;　(6) $\operatorname{arc\,ctg}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$.

2．用反余切表示适合于下列各等式的角 $x(0<x<\pi)$：

(1) $\operatorname{ctg} x=\dfrac{\sqrt{5}}{7}$;　(2) $3\operatorname{ctg} x+1=0$;

(3) $\operatorname{ctg}\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{1}{5}$;　(4) $\operatorname{ctg}\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$;

(5) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{x}{2}\right)-\dfrac{2}{3}=0$.

3．计算下列各式的值：

(1) $2\arccos 0+\operatorname{arc\,ctg} 0$;　(2) $\operatorname{arc\,tg} 0+\operatorname{arc\,ctg} 0$;

(3) $\operatorname{arc\,tg}(-1)+\operatorname{arc\,ctg}(-1)$;

(4) $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}+\operatorname{arc\,ctg}(-\sqrt{3})$;

(5) $\operatorname{arc\,tg}\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)+\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

4．证明下列各等式：

(1) $2\operatorname{arc\,ctg} 1=3\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}$;　(2) $3\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}=4\operatorname{arc\,ctg} 1$;

(3) $\operatorname{arc\,ctg}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{7\pi}{4}\right)=3\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{5\pi}{4}\right)$;

(4) $\arccos(\cos 9\pi)=\operatorname{arc\,ctg}\left(\operatorname{ctg}\dfrac{2\pi}{3}\right)-\operatorname{arc\,tg}\left(\operatorname{tg}\dfrac{2\pi}{3}\right)$.

5．求下列各式的值：

(1) $\arcsin 0.5125+\arccos 0.5125$;

(2) $\arcsin(-0.5125)+\arccos(-0.5125)$;

(3) $\operatorname{arc\,tg} 0.5125+\operatorname{arc\,ctg} 0.5125$;

(4) $\operatorname{arc\,tg}(-0.5125)+\operatorname{arc\,ctg}(-0.5125)$.

6. 角 $2\operatorname{arc\,tg} m$ 和 $2\operatorname{arc\,ctg} m$ 可以在什么范围内?

7. 下列各式,哪些有值?并求出值来. 哪些不存在?

(1) $\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} 1.3)$; (2) $\operatorname{tg}(\arcsin 1)$;

(3) $\operatorname{tg}\left[\arcsin\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$; (4) $\operatorname{ctg}[\arccos(-1)]$;

(5) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,tg} 0)$.

8. m 等于什么值时, $\arcsin m=\arccos m$ 和 $\operatorname{arc\,tg} m=\operatorname{arc\,ctg} m$?

9. 求下列各函数的定义域:

(1) $y=\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{\sqrt{x}}$; (2) $y=\sqrt{\operatorname{arc\,ctg}\sqrt{x}}$.

*10. 作出 $y=\operatorname{arc\,ctg}|x|$ 的图象和 $y=|\operatorname{arc\,ctg} x|$ 的图象, 它们是否一样?为什么?

§7·6 反三角函数的三角运算

我们把反正弦函数,反余弦函数,反正切函数和反余切函数总起来叫做**反三角函数**. 它们都表示某一个区间内的角. 求角的三角函数, 通常叫做**三角运算**. 所以反三角函数的三角运算指的就是求出用反正弦,反余弦,反正切和反余切所表示的角的三角函数.

根据反正弦,反余弦,反正切,反余切的定义,我们知道

$$\sin(\arcsin m)=m \quad (|m|\leqslant 1);$$
$$\cos(\arccos m)=m \quad (|m|\leqslant 1);$$
$$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} m)=m;$$
$$\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} m)=m.$$

现在我们要研究的是怎样求反三角函数的其他三角函

数．下面我们用例子来说明：

例 1．求 $\sin[\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3})]$ 的值．

【解】 因为正切等于 $\sqrt{3}$ 的锐角是 $60°$，在 $-90°$ 和 $90°$ 之间，正切等于 $-\sqrt{3}$ 的角是 $-60°$，所以

$$\sin[\operatorname{arc\,tg}(-\sqrt{3})]=\sin(-60°)=-\sin 60°$$

$$=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

例 2．求 $\cos\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)$ 的值．

【解】 设 $\arcsin\frac{8}{17}=\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant\alpha\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$，那末

$$\sin\alpha=\sin\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)=\frac{8}{17}.$$

因为 $\sin\alpha$ 的值是正的，所以 α 的终边在第一象限内，它的余弦的值是正的．

$$\therefore\quad \cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{8}{17}\right)^2}=\frac{15}{17}.$$

就是
$$\cos\left(\arcsin\frac{8}{17}\right)=\frac{15}{17}.$$

例 3．求 $\operatorname{tg}[\arccos(-0.8)]$ 的值．

【解】 设 $\arccos(-0.8)=\alpha(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$，那末

$$\cos\alpha=-0.8.$$

因为 $\cos\alpha$ 的值是负的，所以 α 的终边在第二象限内．

$$\therefore\quad \sin\alpha=\sqrt{1-\cos^2\alpha}=\sqrt{1-(-0.8)^2}=0.6.$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\frac{0.6}{-0.8}=-0.75.$$

就是
$$\operatorname{tg}[\arccos(-0.8)]=-0.75.$$

例 4．求 $\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{82}}+\arcsin\frac{4}{\sqrt{41}}\right)$的值.

【解】 设 $\arcsin\frac{1}{\sqrt{82}}=\alpha$, 那末

$$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{82}},$$

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\sin^2\alpha}=\sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{82}}\right)^2}=\frac{9}{\sqrt{82}}.$$

又设 $\arcsin\frac{4}{\sqrt{41}}=\beta$, 那末

$$\sin\beta=\frac{4}{\sqrt{41}},$$

$$\cos\beta=\sqrt{1-\sin^2\beta}=\sqrt{1-\left(\frac{4}{\sqrt{41}}\right)^2}=\frac{5}{\sqrt{41}}.$$

$$\therefore \quad \sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{82}}\cdot\frac{5}{\sqrt{41}}+\frac{9}{\sqrt{82}}\cdot\frac{4}{\sqrt{41}}=\frac{41}{\sqrt{82}\cdot\sqrt{41}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

就是 $$\sin\left(\arcsin\frac{1}{\sqrt{82}}+\arcsin\frac{4}{\sqrt{41}}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

例 5．求 $\operatorname{tg}(2\operatorname{arc\,tg} a)$的值.

【解】 设 $\operatorname{arc\,tg} a=\alpha$, 那末

$$\operatorname{tg}\alpha=a.$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}=\frac{2a}{1-a^2}.$$

就是 $$\operatorname{tg}(2\operatorname{arc\,tg} a)=\frac{2a}{1-a^2}.$$

习　题　7·6

1．求下列各式的值：

(1) $\cos\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$；　　(2) $\operatorname{tg}\left[\arccos\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right]$；

(3) $\cos\left[2\arcsin\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$；

(4) $\sin\left(\arcsin\dfrac{1}{2}+\arccos\dfrac{1}{2}\right)$；

(5) $\sin\left(\dfrac{1}{2}\arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

2．证明下列各等式：

(1) $\sin\left(\arccos\dfrac{12}{13}\right)=\dfrac{5}{13}$；　　(2) $\operatorname{tg}\left(\arccos\dfrac{8}{17}\right)=\dfrac{15}{8}$；

(3) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\operatorname{arctg}\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-1}$；

(4) $\sin\left(2\arcsin\dfrac{3}{5}\right)=\dfrac{24}{25}$；　　(5) $\operatorname{ctg}(2\operatorname{arcctg}a)=\dfrac{a^2-1}{2a}$.

*3．矩形的面积等于 S，它的最大的边等于 a，求两对角线所夹的锐角的正切.

［提示：先用反正切表示这个锐角的一半，再取它的二倍角的正切.］

4．计算 $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{m}{n}-\operatorname{arctg}\dfrac{m-n}{m+n}\right)$的值.

5．计算$\cos\left(\arccos\dfrac{4}{5}+\arccos\dfrac{12}{13}\right)$的值.

*6．计算$\cos\left(\arcsin\dfrac{4}{5}+\arcsin\dfrac{5}{13}+\arcsin\dfrac{16}{65}\right)$的值.

*7．计算$\operatorname{ctg}\left[2\left(\arcsin\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\operatorname{arcctg}\sqrt{3}\right)\right]$的值.

8．求证 $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{a-b}{1+ab}+\operatorname{arctg}\dfrac{b-c}{1+bc}+\operatorname{arctg}c\right)=a$.

§7·7 反三角函数间的基本关系

反三角函数间的基本关系可以分为下面两类:

1. m 和 $-m$ 的反三角函数间的关系

在§7·2的例题中,我们看到: $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\frac{\pi}{3}$. 但是 $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\pi}{3}$. 所以

$$\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=-\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

在§7·3的例题中,我们看到: $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\frac{\pi}{3}$. 但 $\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{3}$. 所以

$$\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\pi-\arccos\frac{1}{2}.$$

现在我们来证明一般的公式:

$$\arcsin(-m)=-\arcsin m; \tag{1}$$
$$\arccos(-m)=\pi-\arccos m; \tag{2}$$
$$\operatorname{arc\,tg}(-m)=-\operatorname{arc\,tg} m; \tag{3}$$
$$\operatorname{arc\,ctg}(-m)=\pi-\operatorname{arc\,ctg} m. \tag{4}$$

公式(1)的证明可以分为两步:

1) 先证明等式两边的角有同一个正弦值.

根据反正弦的定义,得

$$\sin[\arcsin(-m)]=-m.$$

利用诱导公式,得

$$\sin(-\arcsin m)=-\sin(\arcsin m)=-m.$$

这就是说,在公式(1)中,两边的角的正弦都等于 $-m$.

2) 其次,证明等式两边的角都在 $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 这个区间内.

根据反正弦的定义,知道

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant \arcsin(-m)\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

同样，
$$-\frac{\pi}{2}\leqslant \arcsin m\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

用 -1 乘第二个不等式的每一项，不等号都要改变方向，所以得

$$\frac{\pi}{2}\geqslant -\arcsin m\geqslant -\frac{\pi}{2},$$

就是
$$-\frac{\pi}{2}\leqslant -\arcsin m\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

因此，$\arcsin(-m)$和$-\arcsin m$都在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$这个区间内.

但在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$这个区间内，正弦等于$-m$的角只有一个. 这就证明了

$$\arcsin(-m)=-\arcsin m.$$

用同样的方法可以证明公式(3).

现在我们来证明公式(2). 证明也分为两步：

1) 根据反余弦的定义，得

$$\cos[\arccos(-m)]=-m.$$

利用诱导公式，得

$$\cos(\pi-\arccos m)=-\cos(\arccos m)=-m.$$

所以公式(2)的两边的角的余弦都等于$-m$.

2) 根据反余弦的定义，

$$0\leqslant\arccos(-m)\leqslant\pi,$$

同样，
$$0\leqslant\arccos m\leqslant\pi.$$

从π分别减去第二个不等式的每一项. 根据“等量减去不等量，减去较大的量，所得的差反而小”的性质，可以知道，

$$\pi-0\geqslant\pi-\arccos m\geqslant\pi-\pi,$$

就是
$$0\leqslant\pi-\arccos m\leqslant\pi.$$

因此，公式(2)两边的角都在$[0,\ \pi]$这个区间内.

但在$[0,\ \pi]$这个区间内，余弦等于$-m$的角只有一个. 所以

$$\arccos(-m)=\pi-\arccos m.$$

用同样的方法可以证明公式(4).

2. 同一个自变量的反三角函数间的关系

我们先来看这样一个例子：$\arcsin\frac{1}{2}=30°$，$\arccos\frac{1}{2}=60°$，所以，

$$\arcsin\frac{1}{2}+\arccos\frac{1}{2}=90°.$$

一般地说，我们可以证明

$$\arcsin m+\arccos m=\frac{\pi}{2};\tag{5}$$

$$\operatorname{arc\,tg} m+\operatorname{arc\,ctg} m=\frac{\pi}{2}.\tag{6}$$

为了证明公式(5)，我们只要证明

$$\arcsin m=\frac{\pi}{2}-\arccos m$$

就可以了.

1）根据反正弦的定义，

$$\sin(\arcsin m)=m.$$

利用诱导公式，得

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos m\right)=\cos(\arccos m)=m.$$

所以 $$\sin(\arcsin m)=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos m\right).$$

2）根据反正弦的定义，

$$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin m\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

根据反余弦的定义，

$$0\leqslant\arccos m\leqslant\pi.$$

因此 $$\frac{\pi}{2}-0\geqslant\frac{\pi}{2}-\arccos m\geqslant\frac{\pi}{2}-\pi,$$

就是 $$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\arccos m\leqslant\frac{\pi}{2}.$$

所以 $\arcsin m$ 和 $\frac{\pi}{2}-\arccos m$ 都在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$这个区间内.

但是在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$这个区间内正弦等于$m$的角只有一个．因此

$$\arcsin m=\frac{\pi}{2}-\arccos m,$$

移项，就得到

$$\arcsin m+\arccos m=\frac{\pi}{2}.$$

用同样的方法可以证明公式(6).

从上面所讲的可以看到，证明反三角函数间的关系一般分为两步：第一步证明等式两边的角的某一个同名三角函数值相等；第二步证明两个角在同一个区间内．如果在这个区间内，对应于已知的三角函数值的角只有一个，那末，就可以知道等式两边的角是相等的．

例 证明 $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}$.

【证】 1) $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)$

$$=\frac{\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right)+\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)}{1-\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}\right)\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)}=\frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}}=1.$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}=1.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)=\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}.$$

2)
$$0<\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}<\frac{\pi}{4},$$

$$0<\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}<\frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore\quad 0<\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}<\frac{\pi}{2}.$$

同时
$$0<\frac{\pi}{4}<\frac{\pi}{2}.$$

所以 $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}$ 和 $\frac{\pi}{4}$ 都在 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 这个区间内.

但是在 $\left(0,\ \frac{\pi}{2}\right)$ 这个区间内，正切等于 1 的角只有一个．因此，

$$\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}.$$

习 题 7·7

1．求下列各式的值:

(1) $\arcsin m+\arcsin(-m)$;　　(2) $\arccos m+\arccos(-m)$.

2．证明下列各等式:

(1) $\sin(2\arcsin m)=2m\sqrt{1-m^2}$;

(2) $\operatorname{tg}(\arcsin m)\cdot\cos(\arcsin m)=m$;

(3) $\cos(2\arccos m)=2m^2-1$;　(4) $\sin(2\operatorname{arc\,tg} m)=\dfrac{2m}{1+m^2}$.

3．求证 $\operatorname{arc\,tg} n+\operatorname{arc\,ctg}(n+1)=\operatorname{arc\,tg}(n^2+n+1)$.

4．设 $\operatorname{arc\,tg} a+\operatorname{arc\,tg} b+\operatorname{arc\,tg} c=\pi$, 求证 $a+b+c=abc$.

5．求证 $2\operatorname{arc\,tg} a=\arccos\dfrac{1-a^2}{1+a^2}(a\geqslant 0)$.

6．求证 $\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{3}{4}+\operatorname{arc\,ctg}\dfrac{1}{7}=\dfrac{3\pi}{4}$.

7．求证 $\cos\left(\dfrac{1}{2}\arccos m\right)=\sqrt{\dfrac{1+m}{2}}$.

8．求证 $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{5}}+\operatorname{arc\,ctg} 3=\dfrac{\pi}{4}$.

9．求证 $\arcsin\dfrac{3}{5}-\arccos\dfrac{12}{13}=\arcsin\dfrac{16}{65}$.

本 章 提 要

1．反三角函数的概念

函　数	定　义	定义域	函数值域
$y=\arcsin x$	$\sin(\arcsin x)=x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$-\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}$
$y=\arccos x$	$\cos(\arccos x)=x$	$-1\leqslant x\leqslant 1$	$0\leqslant y\leqslant\pi$
$y=\operatorname{arc\,tg} x$	$\operatorname{tg}(\operatorname{arc\,tg} x)=x$	$-\infty<x<+\infty$	$-\frac{\pi}{2}<y<\frac{\pi}{2}$
$y=\operatorname{arc\,ctg} x$	$\operatorname{ctg}(\operatorname{arc\,ctg} x)=x$	$-\infty<x<+\infty$	$0<y<\pi$

2. 反三角函数间的关系

(1) 第一类关系:

1) $\arcsin(-x)=-\arcsin x$;

2) $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$;

3) $\operatorname{arc\,tg}(-x)=-\operatorname{arc\,tg} x$;

4) $\operatorname{arc\,ctg}(-x)=\pi-\operatorname{arc\,ctg} x$.

(2) 第二类关系:

1) $\arcsin x+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$;

2) $\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,ctg} x=\dfrac{\pi}{2}$.

3. 证明反三角函数恒等式的一般步骤

(1) 证明等式两边的角的某一同名三角函数值相等;

(2) 证明两边的角同在某一个区间内.

复 习 题 七

1. 计算下列各式的值:

(1) $\operatorname{tg}\left(\dfrac{1}{2}\operatorname{arc\,tg} 2\right)$;　　(2) $\cos\left(2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{2}\right)$;

(3) $\sin\left(\dfrac{1}{2}\arcsin\dfrac{3}{5}\right)$;　　(4) $\cos\left(\arccos\dfrac{3}{5}+\arccos\dfrac{4}{5}\right)$.

2. 菱形的周长等于 p, 它的较小的对角线等于 d, 求菱形的锐角.

3. 三角形的三边为 a, b 和 c, 求角 C.

4. 求证 $\arccos\dfrac{4}{5}+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{3}{5}=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{27}{11}$.

5. 求证 $2\operatorname{arc\,tg}\dfrac{2}{3}=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{12}{5}$.

6. 求证 $\arcsin\dfrac{3}{5}+\arcsin\dfrac{8}{17}=\arcsin\dfrac{77}{85}$.

*7. 试证 $\operatorname{tg}\left(\operatorname{arc\,tg} x+\operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x}\right)$不存在.

*8. 试证 $3\arcsin x=\arcsin(3x-4x^3)$.

9. 求证 $\arcsin\dfrac{4}{5}+\arcsin\dfrac{5}{13}+\arcsin\dfrac{16}{65}=\dfrac{\pi}{2}$.

10. 求证 $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{7}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{8}=\frac{\pi}{4}$.

11. 求下列各式的值:

(1) $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}+\operatorname{arc\,tg}(-1)$;

(2) $\operatorname{tg}\frac{1}{2}\left(\arcsin\frac{3}{5}-\arccos\frac{63}{65}\right)$.

12. 求适合下列各等式的 x:

(1) $\arcsin\left(-\frac{4}{5}\right)=-\arccos x$;

(2) $\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}=\operatorname{arc\,ctg} x$;

(3) $\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=-\operatorname{arc\,ctg} x$.

13. 已知 $\arcsin x=\arcsin 2x$, 求 x.

*14. 求适合等式 $\operatorname{arc\,tg}\frac{x-1}{x+2}+\operatorname{arc\,tg}\frac{x+1}{x+2}=\frac{\pi}{4}$ 的 x.

*15. 求适合等式 $\arcsin x+\arcsin 2x=\frac{\pi}{3}$ 的 x.

*16. 已知 $\arccos x+\arccos y+\arccos z=\pi$, 求证 $x^2+y^2+z^2+2xyz=1$.

*17. 求证

$$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{a(a+b+c)}{bc}}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{b(a+b+c)}{ca}}+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{\frac{c(a+b+c)}{ab}}=\pi.$$

*18. 求证

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right)+\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\arccos\frac{a}{b}\right)=\frac{2b}{a}.$$

第八章　三　角　方　程

§8·1　最简三角方程

我们知道，含有未知数的等式叫做方程．如果方程中含有未知数的三角函数，那末就叫做**三角方程**．例如

$$2\sin x-1=0;$$

$$\sin x+\cos x=1;$$

等等，都是三角方程．象方程

$$\sin x+x-1=0,$$

未知数不仅出现在三角函数记号的后面，而且还有不在三角函数记号后面的，这样的方程也是三角方程．

求出适合于三角方程的未知数的一切值，叫做**解三角方程**．这些值叫做三角方程的**解**．某些三角方程可能没有解，就是，未知数的任何值都不适合于求解的方程．遇到这样的情形，解方程的结果只要指出它没有解就可以了．

解三角方程的问题，在前面几章中早已遇到过．不过以前我们不说解方程，而说"求适合于等式的角"，或者"求适合于下列条件的角"．其实这和解方程是同一回事．在这一章中，我们要把解三角方程的知识有系统地介绍一下．

三角方程的形式是多种多样的．它不象代数中的一元一次方程或者一元二次方程那样，有固定的解法．实际上，只有某些特殊类型的三角方程才能够用初等数学的方法求出它们的解．

用初等方法解特殊类型的三角方程时，归根结底，要把所给的方程化成一个或者几个象 $\sin x=a$，$\cos x=a$，$\operatorname{tg} x=a$，$\operatorname{ctg} x=a$ 等形式的方程．这样的方程叫做**最简三角方程**．

解最简三角方程，就是§2·9中所讲的“已知一个三角函数的值，求角”的问题．虽然这个问题以前已经解决了，但是利用反三角函数，可以更方便地写出结果．现在我们分别说明如下：

1．$\sin x=a$

例1．解方程 $\sin x=\frac{3}{4}$．

【解】因为已知的正弦的值是正的，所以在0与 $\frac{\pi}{2}$ 之间有未知数 x 的一个值适合于所给的方程．这个值可以用反正弦来表示，写做

$$x_1=\arcsin\frac{3}{4}.$$

根据诱导公式 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$，可以知道，适合于 $\sin x=\frac{3}{4}$ 的未知数的另一个值是

$$x_2=\pi-\arcsin\frac{3}{4}.$$

因为正弦函数的最小正周期是 2π，所以对于 x_1 和 x_2 加上或者减去 2π 的整数倍，所得的角的正弦都等于 $\frac{3}{4}$．

由此可知，适合于所给方程的未知数的一切值是①：

$$x=2n\pi+\arcsin\frac{3}{4};$$

① 以下 n 都表示整数．

$$x=2n\pi+\pi-\arcsin\frac{3}{4}$$
$$=(2n+1)\pi-\arcsin\frac{3}{4}.$$

例 2. 解方程　$\sin x=-\frac{2}{3}$.

【解】 因为已知的正弦的值是负的，所以在 $-\frac{\pi}{2}$ 与 0 之间有所给方程的一个解．这个解可以写做

$$x_1=\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right).$$

又因为诱导公式 $\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ 对于 α 的任何值都成立，所以方程的另一个解是

$$x_2=\pi-\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right).$$

因此，所给方程的一切解是

$$x=2n\pi+\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right);$$
$$x=2n\pi+\pi-\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right)$$
$$=(2n+1)\pi-\arcsin\left(-\frac{2}{3}\right).$$

从上面的例题，可以看到，当 $|a|\leqslant 1$ 时，方程 $\sin x=a$ 的一个解总可以写做

$$x_1=\arcsin a,$$

而另一个解写做

$$x_2=\pi-\arcsin a.$$

因此，方程 $\sin x=a$ 的一切解是

$$\boldsymbol{x=2n\pi+\arcsin a;}\qquad(1)$$
$$\boldsymbol{x=(2n+1)\pi-\arcsin a.}\qquad(2)$$

由于正弦的绝对值不能超过1，所以当 $|a|>1$ 时，方程 $\sin x=a$ 没有解.

利用公式(1)和(2)，我们可以直接写出方程 $\sin x=a$ 的解.

2. $\cos x=a$

例3. 解方程 $\cos x=-0.3$.

【解】 已知的余弦的值是负的. 方程有一个解在 $\frac{\pi}{2}$ 与 π 之间. 这个解可以写做

$$x_1=\arccos(-0.3).$$

因为 $\cos(-\alpha)=\cos\alpha$，所以方程有另一个解

$$x_2=-\arccos(-0.3).$$

根据余弦函数的最小正周期是 2π，可以知道方程的一切解是

$$x=2n\pi+\arccos(-0.3);$$
$$x=2n\pi-\arccos(-0.3).$$

一般地说，当 $|a|\leqslant 1$，方程 $\cos x=a$ 的一个解总可以写成

$$x_1=\arccos a,$$

并且
$$x_2=-\arccos a$$
也是方程的一个解. 因此，方程 $\cos x=a$ 的一切解是

$$\boldsymbol{x=2n\pi\pm\arccos a}.$$

当 $|a|>1$ 时，方程 $\cos x=a$ 没有解.

3. $\operatorname{tg} x=a$ 不论 a 是正数、负数或者零，$\operatorname{tg} x=a$ 的一个解可以写做

$$x_1=\operatorname{arc\,tg} a.$$

因为正切函数的最小正周期是 π，所以对于 x_1 加上或者

减去π的整数倍所得的角的正切都等于a. 因此，方程的一切解是

$$\boldsymbol{x=n\pi+\operatorname{arc\,tg} a}.$$

例4. 解方程 $\operatorname{tg} x=\sqrt{3}$.

【解】 因为$\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}=\frac{\pi}{3}$，所以方程的解是

$$x=n\pi+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}=n\pi+\frac{\pi}{3}.$$

4. $\boldsymbol{\operatorname{ctg} x=a}$ 这个方程的一个解是

$$x_1=\operatorname{arc\,ctg} a.$$

因为余切函数的最小正周期是π，所以方程的一切解是

$$\boldsymbol{x=n\pi+\operatorname{arc\,ctg} a}.$$

例5. 解方程 $\operatorname{ctg} x=-1$.

【解】 因为$\operatorname{arc\,ctg}(-1)=\frac{3\pi}{4}$，所以方程的解是

$$x=n\pi+\operatorname{arc\,ctg}(-1)=n\pi+\frac{3\pi}{4}.$$

习 题 8·1

1. a在怎样的范围内，方程$\sin x=\frac{a+1}{2}$有解？

2. a在怎样的范围内，方程$\cos x=\frac{a^2+1}{2}$没有解？

3. a在怎样的范围内，方程$\operatorname{tg} x=\frac{a^2}{a+1}$没有解？

4. a在怎样的范围内，方程$(a-1)\operatorname{ctg} x=3$有解？

5. 已知$ab\neq 0$，方程$\sin x=\frac{a^2+b^2}{2ab}$当$a=b$和$a\neq b$时解的情形怎样？

6. 解方程 $\sin x=\frac{\sqrt{3}}{2}$.

7. 解方程 $\cos x=0.7342$.

8. 解方程 $\sin x=\sin\frac{5\pi}{4}$.

9. 解方程 $\operatorname{tg} x=-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

10. 解方程 $\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}$.

§8·2 只含同角的同名三角函数的三角方程

如果三角方程中只含同一个角的同名三角函数，那末可以先应用最简三角方程的解法求出这个角，然后再求未知数的值．现在举例说明如下：

例1． 解方程 $\sin 3x=\frac{1}{2}$.

【解】 我们先把 $3x$ 看做一个未知量，求得它的一切解是

$$3x=2n\pi+\arcsin\frac{1}{2}=2n\pi+\frac{\pi}{6};$$

$$3x=(2n+1)\pi-\arcsin\frac{1}{2}=2n\pi+\pi-\frac{\pi}{6}$$

$$=2n\pi+\frac{5\pi}{6}.$$

∴ 方程的解是

$$x=\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{18};\quad x=\frac{2n\pi}{3}+\frac{5\pi}{18}.$$

为了要知道 x 的值是否适合于原来的方程，我们可以这样来进行验算：

当 $n=0$ 时，$x=\frac{\pi}{18}$ 或 $\frac{5\pi}{18}$(就是 $10°$ 或 $50°$).

令 $x=\frac{\pi}{18}$，我们得

$$\sin 3x=\sin\left(3\cdot\frac{\pi}{18}\right)=\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

令 $x=\frac{5\pi}{18}$，我们得

$$\sin 3x=\sin\left(3\cdot\frac{5\pi}{18}\right)=\sin\frac{5\pi}{6}=\frac{1}{2}.$$

所以 $\frac{\pi}{18}$ 和 $\frac{5\pi}{18}$ 都适合于原方程.

从方程的解可以看出，未知数的其他的值都和 $\frac{\pi}{18}$ 或者 $\frac{5\pi}{18}$ 相差 $\frac{2\pi}{3}$ 的整数倍. 由于 $\sin 3x$ 的最小正周期是 $\frac{2\pi}{3}$(见§3·5)，所以可以知道 $\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{18}$ 和 $\frac{2n\pi}{3}+\frac{5\pi}{18}$ 的正弦都等于 $\frac{1}{2}$，因而它们都是所给方程的解.

例 2. 解方程 $\cos\frac{x}{2}=-\frac{\sqrt{2}}{2}$.

【解】 $\frac{x}{2}=2n\pi\pm\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}$.

$$\therefore\quad x=4n\pi\pm\frac{3\pi}{2}.$$

验算：当 $n=0$ 时，$x=\pm\frac{3\pi}{2}$. 把 $\frac{3\pi}{2}$ 和 $-\frac{3\pi}{2}$ 代入原方程都适合. 因为 $\cos\frac{\pi}{2}$ 的最小正周期是 4π，所以 $4n\pi\pm\frac{3\pi}{2}$ 都是原方程的解.

例 3. 解方程 $\operatorname{tg}(x+30°)=\sqrt{3}$.

【解】 $x+30°=n\cdot180°+\operatorname{arc\,tg}\sqrt{3}=n\cdot180°+60°$.

$$\therefore\quad x=n\cdot180°+30°.$$

请读者自己验算.

例 4. 解方程 $\operatorname{tg}\left(2x-\frac{\pi}{12}\right)=-1$.

【解】 $2x-\frac{\pi}{12}=n\pi+\operatorname{arc\,tg}(-1)$

$$=n\pi+\left(-\frac{\pi}{4}\right)=n\pi-\frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore\quad 2x=n\pi-\frac{\pi}{6},$$

$$x=\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{12}.$$

例 5. 解方程 $\operatorname{tg}^2 2x-1=0$.

【解】 $\operatorname{tg}^2 2x-1=0$,

$\operatorname{tg}^2 2x=1$,

$\therefore\quad \operatorname{tg} 2x=\pm 1$.

由 $\operatorname{tg} 2x=1$, 得

$$2x=n\pi+\operatorname{arc\,tg} 1=n\pi+\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore\quad x=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{8}.$$

由 $\operatorname{tg} 2x=-1$, 得

$$2x=n\pi+\operatorname{arc\,tg}(-1)=n\pi-\frac{\pi}{4},$$

$$\therefore\quad x=\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{8}.$$

所以方程的解是

$$x=\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{8};\quad x=\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{8}.$$

例 6. 解方程 $2\sin^2 x-5\sin x-3=0$.

【解】 我们先把 $\sin x$ 看成一个未知量,用代数方法解这个方程,得

$$\sin x=3,\ \sin x=-\frac{1}{2}.$$

因为 $\sin x$ 的值不能大于 1，所以 $\sin x=3$ 没有解.

由 $\sin x=-\dfrac{1}{2}$，得

$$x=2n\pi+\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=2n\pi-\frac{\pi}{6};$$

$$x=(2n+1)\pi-\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right)=2n\pi+\frac{7\pi}{6}.$$

例 7. 解方程 $\dfrac{\cos x-\sqrt{5}}{\cos x}=\dfrac{\cos x-10}{\cos x+\sqrt{5}}.$

【解】 两边都乘以 $\cos x(\cos x+\sqrt{5})$，得

$$\cos^2 x-5=\cos^2 x-10\cos x,$$

就是
$$\cos x=\frac{1}{2}.$$

所以
$$x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

因为求得的 x 的值不使原方程的分母失去意义或者变成零，所以是原方程的解.

习　题　8·2

解下列各方程(1～9)：

1. $\cos 4x=1.$

2. $\sin\left(5x-\dfrac{\pi}{3}\right)=-\dfrac{1}{2}.$

3. $2\cos\left(\dfrac{x}{2}+60^\circ\right)=-\sqrt{2}.$

4. $\operatorname{tg}^2\left(2x+\dfrac{\pi}{4}\right)=3.$

5. $\sin^2 x+\sin x-6=0.$

6. $2\cos^2 2x+3\cos 2x=2.$

7. $\dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{2+\operatorname{tg}^2 2x}=\dfrac{1}{3}.$

8. $\dfrac{1-\sin 3x}{1+\sin 3x}=1.$

9. $\dfrac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}=0.$

10. 下列各方程能否有解？为什么？

(1) $\sin^2\left(2x-\frac{\pi}{3}\right)=2$; (2) $\cos^2\left(\frac{2\pi}{3}-x\right)=a^2+\frac{1}{a^2}(a\neq 0)$.

§8·3 可化成含同角的同名三角函数的三角方程

如果一个三角方程经过变形，可以化成只含同一个角的同一个三角函数的方程，那末就可以用§8·2的方法来解．现在举例说明如下：

例1． 解方程 $\sin^2 x-\cos^2 x=\cos x$.

【解】 这个方程含有未知数的正弦和余弦．但是，利用三角函数间的关系 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$，可以化成只含有未知数的余弦的三角方程．

$$(1-\cos^2 x)-\cos^2 x=\cos x,$$

就是
$$2\cos^2 x+\cos x-1=0.$$

$$\therefore\quad \cos x=-1,\quad \cos x=\frac{1}{2}.$$

由 $\cos x=-1$，得 $x=2n\pi+\pi=(2n+1)\pi$;

由 $\cos x=\frac{1}{2}$，得 $x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

所以原方程的解是

$$x=(2n+1)\pi;\ x=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

例2． 解方程 $3\cos\frac{x}{2}+\cos x=1$.

【解】 由二倍角公式，得 $\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1$.

因此，原方程可以写成

$$3\cos\frac{x}{2}+2\cos^2\frac{x}{2}-1=1.$$

就是 $$2\cos^2\frac{x}{2}+3\cos\frac{x}{2}-2=0.$$

$$\therefore\quad \cos\frac{x}{2}=-2,\quad \cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}.$$

$\cos\frac{x}{2}=-2$ 没有解.

由 $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$, 得

$$\frac{x}{2}=2n\pi\pm\frac{\pi}{3}.$$

$$\therefore\quad x=4n\pi\pm\frac{2\pi}{3}.$$

例 3. 解方程

$$\sin\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\cos\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)\sin\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)=1.$$

【解】 这个方程虽然含有不同角的不同的三角函数，但是左边可以化成两个角的和的正弦. 换句话说，这个方程可以写成

$$\sin\left[\left(3x-\frac{\pi}{3}\right)+\left(3x+\frac{\pi}{6}\right)\right]=1,$$

就是 $$\sin\left(6x-\frac{\pi}{6}\right)=1.$$

因此， $$6x-\frac{\pi}{6}=2n\pi+\frac{\pi}{2},$$

移项，得 $$6x=2n\pi+\frac{2\pi}{3}.$$

所以 $$x=\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{9}.$$

例 4. 解方程 $\dfrac{\cos 2x}{1-\sin 2x}=0.$

【解】 把方程的两边都乘以 $1-\sin 2x$，得

$$\cos 2x=0.$$

由 $\cos 2x=0$，得 $2x=2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$，$x=n\pi\pm\frac{\pi}{4}$.

因为 $x=n\pi+\frac{\pi}{4}$ 使原方程的分母等于零，所以它不是原方程的解. 原方程的解是 $x=n\pi-\frac{\pi}{4}$.

例 5. 解方程 $\dfrac{\sin 3x}{\sin 2x}=\dfrac{\cos 3x}{\cos 2x}$.

【解】 把方程的两边都乘以最简公分母 $\sin 2x\cos 2x$，得

$$\sin 3x\cos 2x=\cos 3x\sin 2x. \qquad (1)$$

移项，得

$$\sin 3x\cos 2x-\cos 3x\sin 2x=0,$$

就是

$$\sin(3x-2x)=0,$$

$$\sin x=0.$$

所以

$$x=n\pi.$$

但当 $x=n\pi$ 时，$\sin 2x=\sin 2n\pi=0$，原方程的一个分母等于零，所以 $x=n\pi$ 不是原方程的解.

原方程没有解.

习 题 8·3

解下列各方程:

1. $\cos^2 x+3\sin x=3$.

2. $\sin^4 x-\cos^4 x=\frac{1}{2}$.

3. $\operatorname{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}+x\right)+\sec^2 x-3=0$.

4. $2\sin^2\frac{x}{2}=\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{x}{2}\right)$.

5. $2\cos x+3=4\cos\frac{x}{2}$.

6. $\sin^2 x+\cos x=-1$.

7. $\cos 2x=\cos x$.

8. $2\operatorname{ctg}^2 x+2\operatorname{cosec}^2 x-7\operatorname{ctg} x+1=0$.

9. $\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=1$.

10. $2\sin^2 x-\sin^2 2x=0$.

11. $\dfrac{\cos^2\frac{x}{2}}{\cos x}=1$.

12. $\dfrac{\sin 4x}{\cos x}=\dfrac{\cos 4x}{\sin x}$.

13. $\dfrac{\sin\frac{x}{2}}{1+\cos x}=0$.

14. $\operatorname{tg} x=\operatorname{tg} 2x$.

§8·4 可化成一边为零而另一边是若干个因式的积的三角方程

在代数中，我们知道，如果一个方程的一边是零，而另一边是若干个因式的积，我们可以令每一个因式等于零，然后解这些方程. 用同样的方法，我们可以解一边是零而另一边是若干个因式的积的三角方程. 举例说明如下:

例 1. 解方程 $\sin x\cos x+1=\sin x+\cos x$.

【解】 移项，得

$$\sin x\cos x-\cos x-\sin x+1=0,$$

就是

$$\cos x(\sin x-1)-(\sin x-1)=0,$$

$$(\sin x-1)(\cos x-1)=0.$$

这样，我们得到了右边为零，而左边为两个因式的积的方程.

由 $\sin x-1=0$，得 $\sin x=1$，$x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$.

由 $\cos x-1=0$，得 $\cos x=1$，$x=2n\pi$.

因此，原方程的解是

$$x=2n\pi+\frac{\pi}{2};\ x=2n\pi.$$

例 2. 解方程　$\sin 4x+\sin x=0$.

【解】 应用把三角函数的和化为积的公式，得

$$2\sin\frac{5x}{2}\cos\frac{3x}{2}=0.$$

由 $\sin\frac{5x}{2}=0$, 得 $\frac{5x}{2}=n\pi$, $x=\frac{2n\pi}{5}$.

由 $\cos\frac{3x}{2}=0$, 得 $\frac{3x}{2}=n\pi+\frac{\pi}{2}$,

$$x=\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{3}=(2n+1)\frac{\pi}{3}.$$

原方程的解是

$$x=\frac{2n\pi}{5};\quad x=(2n+1)\frac{\pi}{3}.$$

例 3. 解方程　$\sin 3x+\cos 2x=0$.

【解】 因为 $\cos 2x=\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)$, 所以原方程可以写成

$$\sin 3x+\sin\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)=0.$$

把左边的三角函数的和化为积，得

$$2\sin\frac{1}{2}\left[3x+\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\right]\cos\frac{1}{2}\left[3x-\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)\right]=0,$$

就是
$$2\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\cos\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0.$$

由 $\sin\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=0$, 得 $\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}=n\pi$, $\frac{x}{2}=n\pi-\frac{\pi}{4}$, $x=2n\pi-\frac{\pi}{2}$.

由 $\cos\left(\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}\right)=0$, 得 $\frac{5x}{2}-\frac{\pi}{4}=n\pi+\frac{\pi}{2}$, $\frac{5x}{2}=n\pi+\frac{3\pi}{4}$, $x=\frac{2n\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}$.

原方程的解是

$$x=2n\pi-\frac{\pi}{2}; \quad x=\frac{2n\pi}{5}+\frac{3\pi}{10}.$$

例 4. 解方程 $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=0$.

【解】 把这个方程写成

$$(\sin x+\sin 3x)+\sin 2x=0.$$

再把括号中的三角函数的和化为积，得

$$2\sin 2x\cos x+\sin 2x=0.$$

$$\therefore \quad \sin 2x(2\cos x+1)=0.$$

由 $\sin 2x=0$, 得 $2x=n\pi$, $x=\frac{n\pi}{2}$.

由 $2\cos x+1=0$, 得 $\cos x=-\frac{1}{2}$, $x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$.

因此，原方程的解是

$$x=\frac{n\pi}{2}; \quad x=2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}.$$

例 5. 解方程 $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x+\operatorname{tg} 3x=0$.

【解】 我们可以用正弦与余弦的比代替正切，把原方程化成分母含有未知数的三角方程

$$\frac{\sin x}{\cos x}+\frac{\sin 2x}{\cos 2x}+\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=0.$$

把第一个和第二个分式通分后相加，得

$$\frac{\sin x\cos 2x+\cos x\sin 2x}{\cos x\cos 2x}+\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=0,$$

就是
$$\frac{\sin 3x}{\cos x\cos 2x}+\frac{\sin 3x}{\cos 3x}=0.$$

两边都乘以最简公分母，得

$$\sin 3x\cos 3x+\sin 3x\cos x\cos 2x=0.$$

就是
$$\sin 3x(\cos 3x+\cos x\cos 2x)=0.$$

这个方程可以分成下面的两个方程来解：

$$\sin 3x=0, \quad \cos 3x+\cos x\cos 2x=0.$$

如果 $\sin 3x=0$，那末

$$3x=n\pi,$$

$$x=\frac{n\pi}{3}.$$

因为所得的 x 的值不使原方程的分母等于零，所以它是原方程的解.

如果 $\cos 3x+\cos x\cos 2x=0$，那末

$$4\cos^3 x-3\cos x+\cos x(2\cos^2 x-1)=0,$$

就是

$$6\cos^3 x-4\cos x=0,$$

$$2\cos x(3\cos^2 x-2)=0.$$

$\cos x=0$ 的解不是原方程的解，因为它使原方程的分母等于零.

由 $3\cos^2 x-2=0$，得

$$\cos^2 x=\frac{2}{3},$$

$$\cos x=\pm\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

$$x=2n\pi\pm\arccos\sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$x=2n\pi\pm\arccos\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

因为 x 的这些值不使原方程的分母等于零，所以它们都是原方程的解.

因此，原方程的解是

$$x=\frac{n\pi}{3}; \quad x=2n\pi\pm\arccos\sqrt{\frac{2}{3}};$$

$$x=2n\pi\pm\arccos\left(-\sqrt{\frac{2}{3}}\right).$$

习 题 8·4

解下列各方程:

1. $\sin^2x(1+\sin^2x)=0$.　　2. $\csc x\sin\frac{x}{2}=0$.

3. $\cos 2x\operatorname{tg}x=0$.　　4. $\sin x\operatorname{tg}x\sec x=0$.

5. $2\operatorname{ctg}x\sin x+\operatorname{ctg}x=0$.　　6. $5\cos^2x+3\sin^2x=7\cos x$.

7. $2\sin^2x+\sin^2 2x=0$.　　8. $\sin 2x+\sin x=0$.

9. $\sin(50°-x)=\cos(50°+x)$.

10. $1-\sin x\cos x+\sin x-\cos x=0$.

11. $\sin 5x=\sin 4x$.　　12. $\cos x+\cos 3x=\cos 5x+\cos 7x$.

13. $\cos 15x=\sin 5x$.　　14. $\cos x-\cos 3x=\sin 2x$.

15. $\dfrac{1+\cos 2x}{2\cos x}=\dfrac{\sin 2x}{1-\cos 2x}$.

16. $\dfrac{1+\operatorname{tg}x}{1-\operatorname{tg}x}=1+\sin 2x$.

17. $\dfrac{1}{\cos\left(x+\frac{2\pi}{3}\right)}+\dfrac{1}{\cos\left(x-\frac{2\pi}{3}\right)}=2\cos x$.

§8·5 形如 $a\sin x+b\cos x=c$ 的三角方程的解法

前面三节中所讲的解三角方程的方法，是三种最常用的方法. 此外，某些特殊形式的三角方程有特殊的解法. 我们来看下面的例题:

例 1. 解方程　$2\sin x+7\cos x=6$.

【解】 把方程的两边都除以 2，得

$$\sin x+\frac{7}{2}\cos x=3. \tag{1}$$

我们用 §4·9 的方法把方程 (1) 变形，使它的左边成为一个角的正

弦的形式.

令 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{7}{2}$. 代入方程(1), 得

$$\sin x+\operatorname{tg}\varphi\cos x=3,$$

就是
$$\sin x+\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x=3.$$

两边都乘以 $\cos\varphi$, 得

$$\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=3\cos\varphi,$$

就是

$$\sin(x+\varphi)=3\cos\varphi. \tag{2}$$

查表, 取角 φ 的一个值:

$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{7}{2}=74^\circ3'.$$

$$\therefore\quad \cos\varphi=\cos 74^\circ3'=0.2748.$$

代入方程(2), 得

$$\sin(x+74^\circ3')=3\times0.2748=0.8244.$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad x+74^\circ3'&=n\cdot360^\circ+\arcsin0.8244\\&=n\cdot360^\circ+55^\circ32';\\ x+74^\circ3'&=n\cdot360^\circ+180^\circ-\arcsin0.8244\\&=n\cdot360^\circ+180^\circ-55^\circ32'.\end{aligned}$$

$$\therefore\quad x=n\cdot360^\circ-18^\circ31';$$
$$x=n\cdot360^\circ+50^\circ25'.$$

例 2. 解方程 $\sin x-8\cos x=14$.

【解】 令 $\operatorname{tg}\varphi=8$. 代入原方程, 得

$$\sin x-\operatorname{tg}\varphi\cos x=14,$$

就是
$$\sin x-\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x=14.$$

$$\therefore\quad \sin x\cos\varphi-\cos x\sin\varphi=14\cos\varphi,$$

就是
$$\sin(x-\varphi)=14\cos\varphi.$$

查表, 得
$$\varphi=\operatorname{arc\,tg}8=82^\circ53'.$$

$$\therefore\quad \cos\varphi=\cos82^\circ53'=0.1239.$$

因此,
$$\sin(x-82^\circ53')=14\times0.1239=1.735.$$

但是角的正弦不能大于 1, 所以原方程没有解.

一般地说，解 $a\sin x+b\cos x=c$ 的步骤是

把方程的两边都除以 a，得

$$\sin x+\frac{b}{a}\cos x=\frac{c}{a}.$$

令 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{b}{a}$，代入后，得

$$\sin x+\operatorname{tg}\varphi\cos x=\frac{c}{a},$$

就是
$$\sin x+\frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}\cos x=\frac{c}{a}.$$

因此，
$$\sin x\cos\varphi+\cos x\sin\varphi=\frac{c}{a}\cos\varphi,$$

就是
$$\sin(x+\varphi)=\frac{c}{a}\cos\varphi.$$

$$\therefore\quad x+\varphi=2n\pi+\arcsin\left(\frac{c}{a}\cos\varphi\right);$$

$$x+\varphi=(2n+1)\pi-\arcsin\left(\frac{c}{a}\cos\varphi\right).$$

$$\therefore\quad x=2n\pi-\varphi+\arcsin\left(\frac{c}{a}\cos\varphi\right);$$

$$x=(2n+1)\pi-\varphi-\arcsin\left(\frac{c}{a}\cos\varphi\right).$$

注意，解 $a\sin x+b\cos x=c$，也可以把方程的两边都除以 b，而令 $\frac{a}{b}=\operatorname{tg}\varphi$.

例 3．解方程　$6\cos x-8\sin x=9$.

【解】
$$6\cos x-8\sin x=9,$$

$$\cos x-\frac{4}{3}\sin x=\frac{3}{2}.$$

令 $\operatorname{tg}\varphi=\frac{4}{3}$，得

$$\cos x-\operatorname{tg}\varphi\sin x=\frac{3}{2}.$$

$$\therefore\quad \cos x\cos\varphi-\sin x\sin\varphi=\frac{3}{2}\cos\varphi,$$

就是 $$\cos(x+\varphi)=\frac{3}{2}\cos\varphi.$$

查表，得 $$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}=53°8',$$

$$\therefore\quad \cos\varphi=\cos 53°8'=0.6000.$$

因此， $$\cos(x+53°8')=\frac{3}{2}\times 0.6000=0.9000.$$

$$\therefore\quad x+53°8'=n\cdot 360°\pm\arccos 0.9$$
$$=n\cdot 360°\pm 25°50'.$$

$$x=n\cdot 360°+25°50'-53°8'$$
$$=n\cdot 360°-27°18';$$

$$x=n\cdot 360°-25°50'-53°8'$$
$$=n\cdot 360°-78°58'.$$

习　题　8·5

解下列各方程：

1. $\sin x+\cos x=1$.
2. $\sin x+\sqrt{3}\cos x=1$.
3. $\sqrt{3}\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}$.
4. $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}$.
5. $(2+\sqrt{3})\cos\theta=1-\sin\theta$.
6. $\cos 2x=\cos x+\sin x$.
7. $5\sin\theta+2\cos\theta=5$.
8. $\sin x-\cos x=1$.
9. 在直角三角形中，如果一条直角边的3倍与另一条直角边的4倍的和等于斜边的5倍，求两个锐角.

§8·6　$\sin x$ 和 $\cos x$ 的齐次方程的解法

在代数中，含有两个未知数 x 和 y，并且各项的次数都相同的方程，叫做 x 和 y 的齐次方程．例如，

$$ax+by=0,\quad ax^2+bxy+cy^2=0$$

分别是 x 和 y 的一次齐次方程和二次齐次方程．同样，我们把含有 $\sin x$ 和 $\cos x$，并且对于 $\sin x$ 和 $\cos x$ 来说，各项的次

数都相同的三角方程叫做 **sin *x* 和 cos *x* 的齐次方程.**

$\sin x$ 和 $\cos x$ 的一次齐次方程和二次齐次方程的标准形式分别是

$$a\sin x+b\cos x=0,$$

$$a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0.$$

现在我们举例说明它们的解法如下:

例 1. 解方程 $5\sin x+2\cos x=0$.

【解】 这是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的一次齐次方程.

我们知道, $\cos x\neq 0$. 因为如果 $\cos x=0$, 那末 $\sin x$ 等于 1 或者 -1, $5\sin x+2\cos x$ 就等于 5 或者 -5, 不等于零.

因此, 我们可以把方程的两边都除以 $\cos x$, 得出和原方程同解的方程

$$5\frac{\sin x}{\cos x}+2=0,$$

就是 $$5\operatorname{tg} x+2=0.$$

解这个方程, 得

$$\operatorname{tg} x=-\frac{2}{5},$$

$$x=n\cdot 180^\circ+\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{2}{5}\right)$$

$$=n\cdot 180^\circ-\operatorname{arc\,tg}\frac{2}{5},$$

就是 $$x=n\cdot 180^\circ-21^\circ 48'.$$

例 2. 解方程 $2\sin^2 x+3\sin x\cos x+\cos^2 x=0$.

【解】 这是 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的二次齐次方程. 它的解法和例 1 的解法是相仿的.

把方程的两边都除以 $\cos^2 x$, 得

$$2\operatorname{tg}^2 x+3\operatorname{tg} x+1=0.$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg} x=-1, \quad \operatorname{tg} x=-\frac{1}{2}.$$

由 $\operatorname{tg} x=-1$, 得

$$\begin{aligned} x&=n\cdot 180^\circ+\operatorname{arc\,tg}(-1) \\ &=n\cdot 180^\circ-45^\circ. \end{aligned}$$

由 $\operatorname{tg} x=-\frac{1}{2}$, 得

$$\begin{aligned} x&=n\cdot 180^\circ+\operatorname{arc\,tg}\left(-\frac{1}{2}\right) \\ &=n\cdot 180^\circ-26^\circ 34'. \end{aligned}$$

所以原方程的解是

$$x=n\cdot 180^\circ-45^\circ; \quad x=n\cdot 180^\circ-26^\circ 34'.$$

例 3． 解方程 $3\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x=2$.

【解】 这个方程表面上虽然不是齐次方程，但是利用 $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ 的关系，可以把它写成

$$3\sin^2 x-4\sin x\cos x+5\cos^2 x=2(\sin^2 x+\cos^2 x),$$

就是

$$\sin^2 x-4\sin x\cos x+3\cos^2 x=0. \tag{1}$$

这样，我们就把原方程化成了 $\sin x$ 和 $\cos x$ 的二次齐次方程.

把方程(1)的两边都除以 $\cos^2 x$, 得

$$\operatorname{tg}^2 x-4\operatorname{tg} x+3=0.$$

$$\therefore \quad \operatorname{tg} x=1, \quad \operatorname{tg} x=3.$$

由 $\operatorname{tg} x=1$, 得

$$\begin{aligned} x&=n\cdot 180^\circ+\operatorname{arc\,tg} 1 \\ &=n\cdot 180^\circ+45^\circ. \end{aligned}$$

由 $\operatorname{tg} x=3$, 得

$$\begin{aligned} x&=n\cdot 180^\circ+\operatorname{arc\,tg} 3 \\ &=n\cdot 180^\circ+71^\circ 34'. \end{aligned}$$

所以原方程的解是

$$x=n\cdot180^\circ+45^\circ;\quad x=n\cdot180^\circ+71^\circ34'.$$

例 4. 解方程 $8\sin^2\frac{x}{2}+3\sin x-4=0.$

【解】 我们可以把这个方程写成

$$8\sin^2\frac{x}{2}+3\cdot2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-4\left(\sin^2\frac{x}{2}+\cos^2\frac{x}{2}\right)=0,$$

就是
$$4\sin^2\frac{x}{2}+6\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-4\cos^2\frac{x}{2}=0,$$

$$2\sin^2\frac{x}{2}+3\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}-2\cos^2\frac{x}{2}=0.$$

把最后这个方程的两边都除以 $\cos^2\frac{x}{2}$，得

$$2\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+3\operatorname{tg}\frac{x}{2}-2=0.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2},\ \operatorname{tg}\frac{x}{2}=-2.$$

由 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$，得

$$\frac{x}{2}=n\cdot180^\circ+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$$
$$=n\cdot180^\circ+26^\circ34'.$$

由 $\operatorname{tg}\frac{x}{2}=-2$，得

$$\frac{x}{2}=n\cdot180^\circ+\operatorname{arc\,tg}(-2)$$
$$=n\cdot180^\circ-63^\circ26'.$$

所以原方程的解是

$$x=n\cdot360^\circ+53^\circ8';$$
$$x=n\cdot360^\circ-126^\circ52'.$$

习 题 8·6

解下列各方程：

1. $\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\frac{\pi}{3}-x\right)=0$.

2. $\frac{\sqrt{2}}{\sec x}-\frac{1}{\operatorname{cosec} x}=0$.

3. $2\sin^2 x-7\sin x\cos x+6\cos^2 x=0$.

4. $1+\sin^2 x=3\sin x\cos x$.

5. $\sin^2 x+\cos x\sin x=1$.

6. $a\sin x=b\cos^2\frac{x}{2}$.

7. $a\sin^2 x+b\sin x\cos x+c\cos^2 x=0$.

8. $14\cos^2\frac{x}{2}+4\cos x+3\sin x=0$.

9. $\cos^2 5x+7\sin^2 5x=8\cos 5x\sin 5x$.

10. $\sec x=4\sin x+6\cos x$.

§8·7 三角方程的图象解法

前面各节所研究的三角方程的解法通常叫做解析法．除此以外，我们还可以利用图象来解三角方程．

为了使求出的解尽可能地精确，图象最好画在现成的方格纸上①．

现在我们举例说明三角方程的图象解法如下：

例 1. 解方程 $\sin 2x=\sin x$.

【解】 这个方程的解就是函数 $y=\sin 2x$ 和 $y=\sin x$ 的值相同的时候，自变量 x 的值．由此可知，要解这个方程，可以在同一坐标系中画曲线 $y=\sin 2x$ 和 $y=\sin x$，求它们的交点的横坐标．

在图 8·1 中，我们看到，两条曲线在从 $-\pi$ 到 π 的区间内有五个交点．它们的横坐标分别是

$$x_1=0,\ x_{2,3}\approx\pm1.0,\ x_{4,5}=\pm\pi.$$

① 这种方格纸又叫做计算纸，可以在文具店里买到。

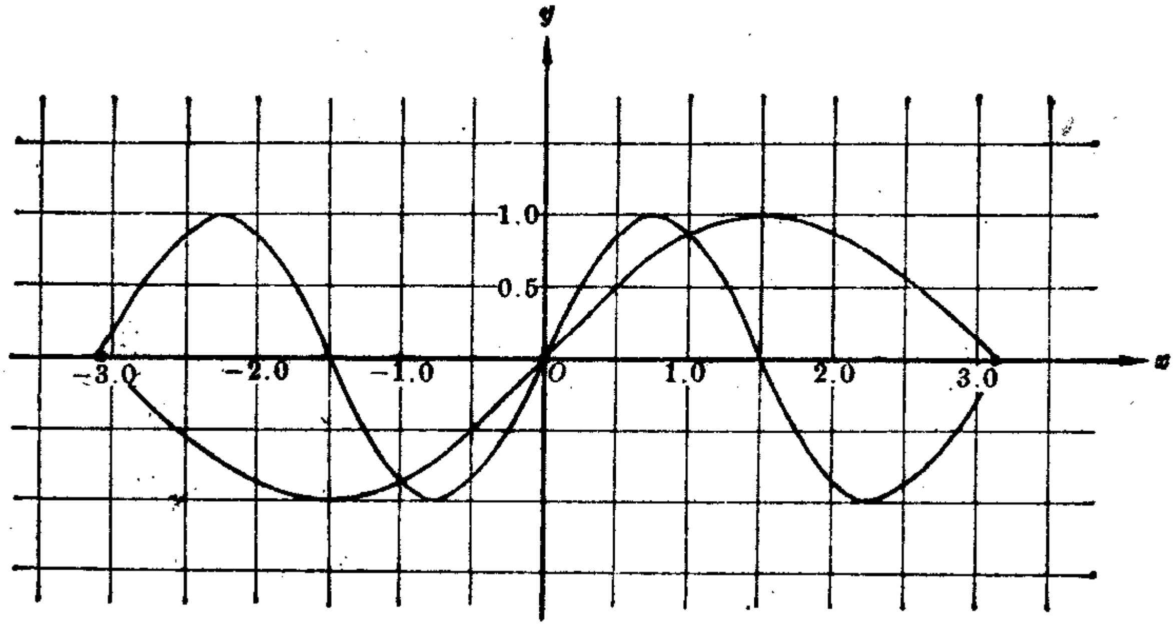


图 8·1

在图中还可以看出，这两个函数的公共周期是 2π. 所以在上面这些值加上 2π 的任意整数倍，得到的值都是两条曲线的交点的横坐标. 因此，原方程的解是

$$x=n\pi;\quad x\approx 2n\pi\pm 1.0.$$

从上面的这个例题中，我们看到，用图象解法只能求得精确度不很高的近似结果，并且手续也比较麻烦. 但是，在实际问题中，我们往往遇到不能用初等方法来解的三角方程. 在这种情形，图象解法的作用就变得显著了. 我们来看下面的例题：

例 2. 已知弓形的面积等于圆的面积的 $\frac{1}{4}$，求弓形的弧所对圆心角的弧度数.

【解】 如图 8·2，设弓形弧 AB 所对的圆心角的弧度数是 x. 那末

$$扇形\ AOB\ 的面积=\frac{x}{2\pi}\cdot\pi R^2$$

$$=\frac{1}{2}R^2x,$$

$$\triangle AOB\ 的面积=\frac{1}{2}R^2\sin x.$$

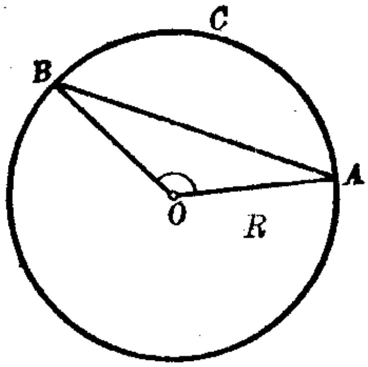


图 8·2

因此,

$$弓形\ ACB\ 的面积=\frac{1}{2}R^2x-\frac{1}{2}R^2\sin x.$$

根据问题的条件,得到方程

$$\frac{1}{2}R^2x-\frac{1}{2}R^2\sin x=\frac{1}{4}\pi R^2.$$

把方程的两边都乘以 $\frac{2}{R^2}$, 得

$$x-\sin x=\frac{\pi}{2},$$

就是

$$\sin x=x-\frac{\pi}{2}.$$

这个方程的未知数既有含于三角函数记号后面的, 也有不含于三角函数记号后面的. 用初等方法不能求得它的解. 但是, 我们可以作函数

$$y=\sin x\ 和\ y=x-\frac{\pi}{2}$$

的图象,求得它们的交点的横坐标(图 8·3):

$$x\approx 2.3.$$

因此,弓形弧所对的圆心角约为 2.3 弧度(132°).

例 3. 解方程 $x-\operatorname{tg}x=0$.

【解】
$$x-\operatorname{tg}x=0,$$
所以
$$x=\operatorname{tg}x.$$

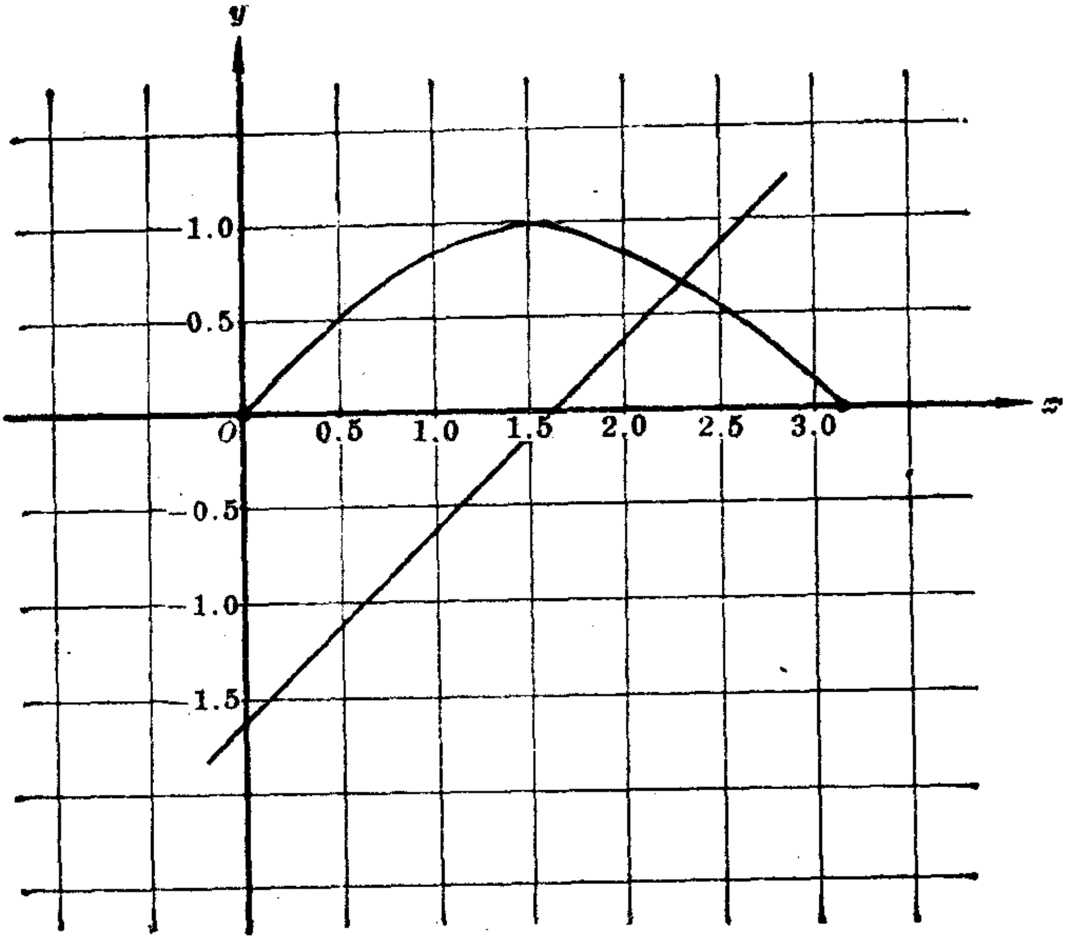


图 8·3

作函数

$$y=x \text{ 和 } y=\operatorname{tg} x$$

的图象(图8·4)．从图中可以看到原方程的一个根是$x=0$．除此以外，原方程还有无穷多个正根和负根．

因为直线$y=x$和曲线$y=\operatorname{tg} x$都是对称于原点的，所以我们只要注意原方程的正根就可以了．

第一个正根约等于4.5；第二个正根约等于7.7．因为每支曲线向右上方无限伸展，并且愈来愈靠近直线$x=n\pi+\frac{\pi}{2}$，所以数值愈大的正根，愈近似于$n\pi+\frac{\pi}{2}$．例如，第三个正根近似于$3\pi+\frac{\pi}{2}$，第四个正根近似于$4\pi+\frac{\pi}{2}$，等等．

原方程的解是

$$x=0,\ \pm 4.5,\ \pm 7.7,\ \text{等等}.$$

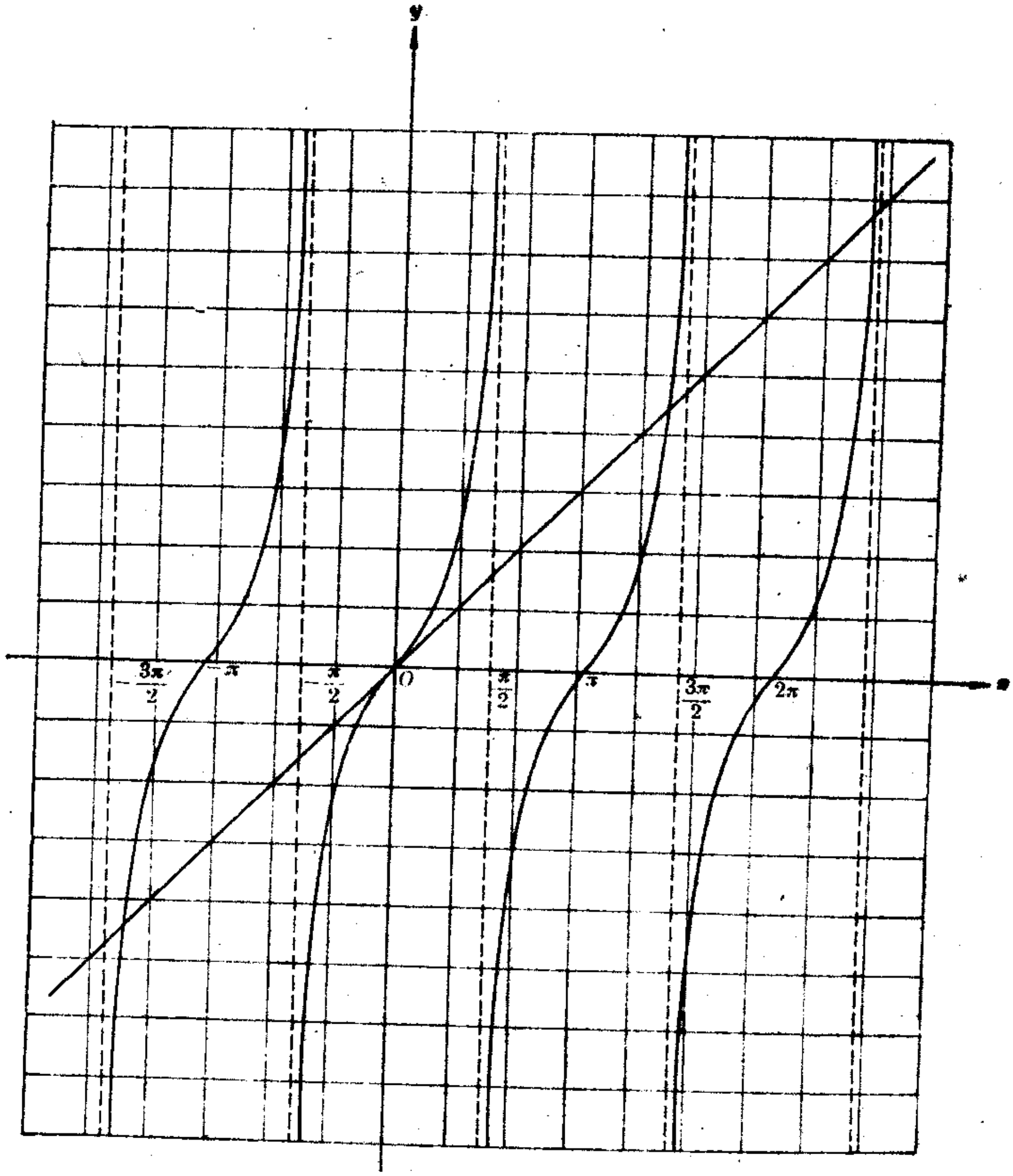


图 8·4

习 题 8·7

1．下列各方程有多少实根？

(1) $\cos x - x = 0$;　　　(2) $x^2 - \sin x = 0$.

利用函数的图象，解下列各方程(2～4)：

2．$\sin x + x = 0$.　　　3．$\cos x - x = \frac{\pi}{2}$.

4．$\sin 2x=\operatorname{tg} x$.

5．求 $\operatorname{tg} x-x=0.5$ 的最小正根的近似值(精确到 0.01)。

本章提要

1．最简三角方程的解

方　　程	解
$\sin x=a(\|a\|\leqslant 1)$	$x=2n\pi+\arcsin a$ $x=(2n+1)\pi-\arcsin a$
$\cos x=a(\|a\|\leqslant 1)$	$\left.\begin{array}{l}x=2n\pi+\arccos a\\x=2n\pi-\arccos a\end{array}\right\\}x=2n\pi\pm\arccos a$
$\operatorname{tg} x=a$	$x=n\pi+\operatorname{arc\,tg} a$
$\operatorname{ctg} x=a$	$x=n\pi+\operatorname{arc\,ctg} a$

2．一般三角方程的解法

(1) 只含同角的同名三角函数的方程：应用最简三角方程的解法.

(2) 可化成含同角的同名三角函数的方程：先化成含同角的同名三角函数的方程，然后应用最简三角方程的解法.

(3) 可化成一边为零而另一边为若干个因式的积的三角方程：令各个因式等于零，解所得的方程.

3．$a\sin x+b\cos x=c$ 的解法

利用辅助角 $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\dfrac{b}{a}$，把左边化成一个角的正弦来解。

4．$\sin x$ 和 $\cos x$ 的齐次方程的解法

化成只含有未知数的正切的三角方程来解.

5．三角方程的图象解法

在同一坐标系中，作出方程两边的函数的图象．它们交点的横坐

标就是原方程的解.

复习题八

1. 下列各方程可能有解吗？为什么？

(1) $\sin x+\cos x=\sqrt{3}$; (2) $\sin x=\sec x$;

(3) $\sin^2 x+\cos^2 x=\sqrt{2}$; (4) $\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{ctg} x=\sqrt{2}$.

2. a 在怎样的范围内，下列各方程才可能有解？

(1) $\sec x=\dfrac{1+a^2}{3}$; (2) $\sin x\cos x=a$;

(3) $\sin x+\cos x=a$; (4) $(a+1)\operatorname{cosec} x=2$.

解下列各方程(3～13)：

3. $4\cos x-3\sec x=2\operatorname{tg} x$. 4. $\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg} x=1$.

5. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=1+\cos x+\cos 2x$.

6. $\dfrac{\sin 2x}{\sin x}=\dfrac{\cos x}{\cos 2x}$. 7. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} 2x=\operatorname{tg} 3x$.

8. $\sin^2(x+15^\circ)-\sin^2(x-15^\circ)=\dfrac{1}{4}$.

9. $\sin x+\sin 2x+\sin 3x=4\cos\dfrac{x}{2}\cos x\cdot\cos\dfrac{3x}{2}$.

*10. $\cos x\,(1+\sin 2x)\,(\sqrt{3}+\operatorname{tg} x)=\cos\dfrac{\pi}{12}+\cos\left(2x-\dfrac{5\pi}{12}\right)$.

*11. $3\sin\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)+4\sin\left(x+\dfrac{\pi}{6}\right)+5\sin\left(5x+\dfrac{\pi}{6}\right)=0$.

12. $\sin 2x=\cos 2x-\cos^2 x+1$.

13. $\sin x+\cos x=\dfrac{\cos 2x}{1-\sin 2x}$.

*14. 解方程组 $\begin{cases}\sqrt{3}\sin 2x=\sin 2y,\\ \sqrt{3}\sin^2 x+\sin^2 y=\dfrac{1}{2}(\sqrt{3}-1).\end{cases}$

*15. m 在怎样的范围内，方程 $\sin^2 x+\sin 2x-2\cos^2 x=m$ 才有解？又令 $m=\dfrac{1}{2}$，解这个方程.

16. 如果等腰三角形两腰上的高的和等于底边上的高，求这等腰三角形的各角.

*17．矩形的一条对角线的长是 10 cm，面积是 $25\sqrt{3}\,\text{cm}^2$，求这对角线和各边所夹的角．

*18．在一个正方形内作一个内接正方形，使它们面积的比为 3:2，求内接正方形的边与原正方形的边间所成的角．

*19．把 60° 的角分为二部分，使一部分的正弦为另一部分的正弦的两倍．求这两部分的度数．

*20．利用图象求方程 $x^2\sin x=1$ 的绝对值最小的正根和负根的近似值(精确到 0.01)．

*21．利用图象求方程 $\mathrm{tg}\,x=2x$ 的最小正根(精确到 0.01)．

总 复 习 题

1. 求下列各函数的定义域:

(1) $y=\sqrt{-\cos x}$;　　(2) $y=\dfrac{1}{\operatorname{tg} x \sec x}$;

(3) $y=\sqrt{\sqrt{2}-2\sin x}$;　　(4) $y=\lg \operatorname{tg} 3x$;

(5) $y=\dfrac{\operatorname{cosec} x}{1-\operatorname{tg} x}$;　　(6) $y=\sqrt{\sin x-\cos x}$.

2. 下列各等式能否成立,为什么?

(1) $\sin^3 x=-1.5$;　　(2) $\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x=\sqrt{3}$;

(3) $\sec x \operatorname{cosec} x=\sqrt{2}$;

(4) $\sin x+\operatorname{cosec} x=\dfrac{2a^2}{a^2+1}$　($a\neq 0$, 且 $|a|\neq 1$).

3. 在哪一个象限内:

(1) 角的正弦和余弦都随着角的增大而增大?

(2) 角的正弦和正切都随着角的增大而增大?

(3) 角的正割和余割都随着角的增大而增大?

4. 化下列各式为小于 45° 的正锐角的三角函数:

(1) $\sin 2600°$;　(2) $\cos 3114°$;　(3) $\operatorname{tg}(-736°14')$;

(4) $\operatorname{ctg} 1122°$;　(5) $\sec(-1947°)$;　(6) $\operatorname{cosec}(-3700°)$.

5. 化简下列各式:

(1) $\dfrac{\operatorname{tg}(\pi-\alpha)}{\sin(\pi-\alpha)\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}+\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)\cos(\alpha-2\pi)}$;

(2) $\cos\left(\dfrac{4n+1}{4}\pi+\alpha\right)+\cos\left(\dfrac{4n-1}{4}\pi-\alpha\right)$;

(3) $\dfrac{2\cos^2(90°+\alpha)[\sec^2(180°-\alpha)+1]}{1-\sin^4(\alpha-270°)}$
$+\operatorname{ctg}(270°+\alpha)[\operatorname{ctg}(180°+\alpha)+\operatorname{tg}(180°+\alpha)]$;

(4) $\operatorname{tg}^2\left(\frac{2n+1}{2}\pi+\alpha\right)-\operatorname{tg}^2\left(\frac{2n+1}{2}\pi-\alpha\right)$;

(5) $\frac{2\cos 660^\circ+\sin 630^\circ}{3\cos 1022^\circ+2\cos(-671^\circ)}$.

6．求下列各式的值:

(1) $8\sin 510^\circ\cos(-300^\circ)\operatorname{tg}240^\circ$;

(2) $10\operatorname{ctg}315^\circ\sin(-150^\circ)\cos 225^\circ$;

(3) $\frac{\sin(\pi+\alpha)}{\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}-\frac{\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}+\operatorname{tg}(\pi-\alpha)+\cos 0$;

(4) $\frac{(a^2-b^2)\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}{\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}+\frac{(a^2+b^2)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{\operatorname{ctg}(\pi-\alpha)}$.

*7．求下列各三角函数的最小正周期:

(1) $\cos\frac{\pi(x+1)}{2}$;　　(2) $\sin 3x+\operatorname{tg}\frac{2}{5}x$;

(3) $\operatorname{tg}3\pi x+\operatorname{ctg}2\pi x$.

8．求证下列各恒等式:

(1) $\frac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}=(\operatorname{tg}\alpha+\sec\alpha)^2$;

(2) $\frac{1+2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}$;

(3) $4\sin x\sin(60^\circ+x)\sin(60^\circ-x)=\sin 3x$;

(4) $\cos^2 x+\cos^2(120^\circ+x)+\cos^2(240^\circ+x)=\frac{3}{2}$;

(5) $\cos^2(\alpha-3\beta)+\cos^2 3\beta-2\cos(\alpha-3\beta)\cos\alpha\cos 3\beta=\sin^2\alpha$;

*(6) $\sin 87^\circ-\sin 59^\circ-\sin 93^\circ+\sin 61^\circ=\sin 1^\circ$.

*9．若 $\sin\alpha:\sin\frac{\alpha}{2}=8:5$，求 $\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{4}$ 的值.

10．若 $\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)=\frac{5}{13}$，$0<x<\frac{\pi}{4}$，计算 $\frac{\cos 2x}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+x\right)}$.

11．已知 $\cos\alpha-\cos\beta=\frac{1}{2}$，$\sin\alpha-\sin\beta=-\frac{1}{3}$，求 $\sin(\alpha+\beta)$ 的值.

12. 已知 $\operatorname{tg} 2x=\frac{24}{7}$，求 $\sin x$ 的值.

13. 不用查表求下列各式的值:

(1) $\sin 37^\circ 30' \cos 7^\circ 30'$;　　(2) $\cos 52^\circ 30' \cos 7^\circ 30'$;

*(3) $\sin^2 10^\circ+\cos^2 40^\circ+\sin 10^\circ \cos 40^\circ$.

14. 求证　$\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2^2}\cos\frac{x}{2^3}\cdots\cos\frac{x}{2^n}=\frac{\sin x}{2^n \sin\frac{x}{2^n}}$.

*15. 求证　$2\cos\frac{45^\circ}{2^n}=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}}$ 至 $n+1$ 项.

[提示：利用 $2\cos 45^\circ=\sqrt{2}$，$2\cos\frac{45^\circ}{2}=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$\cdots$.]

16. 已知 $A+B+C=\pi$，求证

$$\sin^3 A+\sin^3 B+\sin^3 C$$
$$=3\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}+\cos\frac{3A}{2}\cos\frac{3B}{2}\cos\frac{3C}{2}.$$

17. 已知 $A+B+C=\pi$，求证

$$\cos\frac{A}{2}+\cos\frac{B}{2}-\cos\frac{C}{2}$$
$$=4\cos\frac{\pi+A}{4}\cos\frac{\pi+B}{4}\cos\frac{\pi-C}{4}.$$

*18. 已知 $\alpha+\beta+\gamma+\delta=2\pi$，求证

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\delta$$
$$=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma\operatorname{tg}\delta(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma+\operatorname{ctg}\delta).$$

19. 已知 $A+B+C=\pi$，求证

$$\sin(B+2C)+\sin(C+2A)+\sin(A+2B)$$
$$=4\sin\frac{B-C}{2}\sin\frac{C-A}{2}\sin\frac{A-B}{2}.$$

20. 已知 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$，求证

$$\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma=2+2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$

21. 化下列各式为积的形式:

(1) $1+\cos\alpha+\cos\beta+\cos(\alpha+\beta)$;

(2) $\sin^2\alpha-\cos^2\beta$;

(3) $\sin 10^\circ+\sin 20^\circ+\sin 30^\circ+\sin 40^\circ+\sin 50^\circ$;

*(4) $2\cos 10^\circ \cos 20^\circ - 2\cos 30^\circ + \sin 40^\circ$.

22. 已知 $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, n 为整数, 求证

$$\sin 2n\alpha+\sin 2n\beta+\sin 2n\gamma =(-1)^{n+1}\cdot 4\sin n\alpha \sin n\beta \sin n\gamma.$$

*23. 求证 $\cos\dfrac{2\pi}{7}+\cos\dfrac{4\pi}{7}+\cos\dfrac{6\pi}{7}=-\dfrac{1}{2}$.

*24. 求证 $\cos\dfrac{\pi}{5}-\cos\dfrac{2\pi}{5}=\dfrac{1}{2}$.

*25. 已知 $\dfrac{\cos x}{a}=\dfrac{\cos(x+\alpha)}{b}=\dfrac{\cos(x+2\alpha)}{c}=\dfrac{\cos(x+3\alpha)}{d}$, 求证

$$\frac{a+c}{b}=\frac{b+d}{c}.$$

26. x 为何值时, 下列各公式是正确的?

(1) $\sin x=\sqrt{1-\cos^2 x}$; (2) $\cos\dfrac{x}{2}=\sqrt{\dfrac{1+\cos x}{2}}$;

(3) $\sqrt{1+\sin 2x}=\sin x+\cos x$; (4) $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}=\dfrac{\sin x}{1-\cos x}$.

27. α 为何值时, 下列各等式成立?

(1) $\sqrt{\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}=\operatorname{tg}\alpha\sin\alpha$; (2) $\sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{cosec}\alpha$;

(3) $\sqrt{\sec^2\alpha+\operatorname{cosec}^2\alpha}=-\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{ctg}\alpha$;

(4) $\sqrt{\dfrac{1+\sin\alpha}{1-\sin\alpha}}+\sqrt{\dfrac{1-\sin\alpha}{1+\sin\alpha}}=-2\sec\alpha$.

28. 已知 $\cos 2\theta=\dfrac{3}{5}$, 求 $\sin^4\theta+\cos^4\theta$ 的值.

29. 不用查表求下列各式的值:

(1) $\dfrac{2\sin 1200^\circ-\sin 630^\circ}{\operatorname{tg}960^\circ+2\cos(-660^\circ)}$;

(2) $\operatorname{tg}10^\circ \operatorname{ctg}20^\circ \sin 35^\circ \cos 40^\circ \operatorname{cosec}50^\circ \sec 55^\circ \operatorname{ctg}70^\circ \operatorname{tg}80^\circ$;

(3) $\dfrac{\sin 70^\circ+\sin 10^\circ}{\cos 70^\circ-\cos 10^\circ}$.

30. 已知 $\operatorname{tg}^2\alpha+\sec\alpha=5$, 求 $\cos\alpha$.

31. 已知 $2\operatorname{tg}\alpha+3\sin\beta=7$, $\operatorname{tg}\alpha-6\sin\beta=1$, 求 $\sin\alpha$ 及 $\sin\beta$.

*32. 求函数 $y=3\sqrt{3}\cos 2x+3\sin 2x$ 的振幅和周期.

*33. 求证

$$\cos\frac{\pi}{15}\cos\frac{2\pi}{15}\cos\frac{3\pi}{15}\cos\frac{4\pi}{15}\cos\frac{5\pi}{15}\cos\frac{6\pi}{15}\cos\frac{7\pi}{15}=\frac{1}{2^7}.$$

34. 求证 $\sin\frac{\pi}{10}\sin\frac{13\pi}{10}=-\frac{1}{4}$.

*35. 求证 $(1+\sqrt{3})\cos\alpha+(1-\sqrt{3})\sin\alpha=2\sqrt{2}\cos(\alpha+15°)$.

*36. 求证 $\sin 47°+\sin 61°-\sin 11°-\sin 25°=\cos 7°$.

37. 已知 $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{3}{4}$, $\operatorname{tg}\beta=7$, 且 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$, $0<\beta<\frac{\pi}{2}$, 求证

$$\alpha+\beta=\frac{3\pi}{4}.$$

38. 地球的半径为 6400 km, 求赤道上一分的弧的长.

39. 距塔 1 km 处,对于塔的视角为 1°, 塔高多少公尺?

40. 从地面上的一点测得月球的视角为 α, 设观测者到月球中心的距离为 d, 证明月球的直径为 $2d\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$. 又如果月球到地心的距离是 d_1, 而地球的半径为 R, 证明在月球上观测地球的视角为 $2\operatorname{arc\,tg}\frac{R}{d_1}$.

41. 一条铁道的转弯处成圆弧形, 圆弧的半径是 2 km, 一列火车用每小时 30 km 的速度通过,问在 10 秒间转过几度?

42. 电动机的滑轮,每分钟转 900 周, 按度数和弧度数求这滑轮每秒内旋转的角.

43. 机器的轴每秒旋转 50 次, 按弧度求角速度; 再按米求轴上距旋转中心为 0.05 m 的点的线速度.

44. 求下列各式的值.

(1) $\arccos\left(\cos\frac{6\pi}{5}\right)$;

(2) $\sin\left(2\operatorname{arc\,tg}\frac{3}{4}\right)$;

(3) $\operatorname{tg}\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{5}{13}\right)$;

(4) $\sin\left(2\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{3}\right)+\cos(\operatorname{arc\,tg}2\sqrt{3})$.

45. 求 $\operatorname{tg}\arccos\left\{\sin\left[\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}$的值.

46．求 $\sec\{2\arcsin[\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} x)]\}$ 的值．

47．计算 $\cos\left[\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{3}\right)+\operatorname{arctg}\frac{2}{3}\right]$的值．

48．求 $\operatorname{arctg}\left(\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{4}\right)$的值．

49．等式 $\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}$ 有没有错误？如果有的话把它改正．

*50．a 是什么值的时候，$\arccos a-\arccos(-a)$ 的值是正数？是负数？等于零？

51．求证 $\arccos\frac{3}{7}+\arccos\frac{9}{11}=\arccos\left(-\frac{13}{77}\right)$．

52．求证 $\arccos\frac{1}{\sqrt{2}}+\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}}{2}=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$．

53．求适合下列各等式的 x：

(1) $\arcsin x=2\arcsin\sqrt{2}x$；　　(2) $\arccos x=\operatorname{arctg} x$；

(3) $\operatorname{arctg}(x-1)+\operatorname{arctg} x+\operatorname{arctg}(x+1)=\operatorname{arctg} 3x$；

*(4) $\arcsin\frac{2}{3\sqrt{x}}+\arcsin\sqrt{1-x}=\arcsin\frac{1}{3}$．

54．解下列各三角方程：

(1) $\sin|x|=1$；　(2) $|\sin x|=1$；　(3) $\cos x^2=1$．

解下列方程(55～69)：

55．$\sin(x+25°)\sin(x-20°)=\sin(70°+x)\sin(65°-x)$．

56．$\sin x\sin 2x\sin 3x=\frac{1}{4}\sin 4x$．

57．$\operatorname{tg}\frac{3}{5}x\cdot\operatorname{ctg}\frac{5}{3}x=1-\sec\frac{3}{5}x\cdot\operatorname{cosec}\frac{5}{3}x$．

58．$\sin 3x=\cos x-\sin x$．

59．$\sin x\sin 3x=\frac{1}{2}$．

60．$\sec x+\operatorname{cosec} x=2\sqrt{2}$．

61．$\cos 5x+\cos 3x+\sin 5x+\sin 3x=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-4x\right)$．

62. $\sec^2 x=\dfrac{2-\cos x-\sin x}{1-\sin x}$.

63. $\sin^4\dfrac{x}{3}+\cos^4\dfrac{x}{3}=\dfrac{5}{8}$.

64. $\cos^4 x+\sin^4 x-2\sin 2x+\dfrac{3}{4}\sin^2 2x=0$.

65. $\sin 2x\sin x+\cos^2 x=\sin 5x\sin 4x+\cos^2 4x$.

66. $\sin^3 x-\sin^2 x\cos x-3\sin x\cos^2 x+3\cos^3 x=0$.

*67. $\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}=2\cos x$.

68. $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x+\cos^2 4x=2$.

69. $\sin 3x\,\mathrm{tg}\,2x\sec x=0$.

70. 解方程组 $\begin{cases} x+y=\dfrac{\pi}{3}, \\ \mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\,y=\dfrac{2}{\sqrt{3}}. \end{cases}$

71. 解方程组 $\begin{cases} \sin x\sin y=\dfrac{3}{4}, \\ \mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\,y=3. \end{cases}$

72. 解方程组 $\begin{cases} \sin^2 x+\sin^2 y=\dfrac{3}{4}, \\ x+y=75^\circ. \end{cases}$

*73. 如果方程 $x^2+px+q=0$ 的两个根是 $\mathrm{tg}\,\theta$ 和 $\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)$, 又这个方程的两个根的比是 3:2, 求 p, q 的值.

*74. 设 A, B, C 都是正的锐角,求证

$$\sin A+\sin B+\sin C>\sin(A+B+C).$$

[提示: 化 $\sin A+\sin B+\sin C-\sin(A+B+C)$ 为积的形式.]

75. 在 $\triangle ABC$ 中,求证 $\cos A+\cos B+\cos C>1$.

*76. 在 $\triangle ABC$ 中,求证

$$\frac{\cos\dfrac{B}{2}\sin\left(\dfrac{B}{2}+C\right)}{\cos\dfrac{C}{2}\sin\left(\dfrac{C}{2}+B\right)}=\frac{a+c}{a+b}.$$

*77. 如果 a, b, c 为三角形的三边,且 $a^4+b^4+c^4=2c^2(a^2+b^2)$, 试

证角 C 为 $45°$ 或 $135°$。

$\left[\text{提示：将上式化为 } \dfrac{a^2+b^2-c^2}{2ab}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}.\right]$

*78．在等腰直角三角形内，作一个等边三角形，使它的各角顶在原三角形的各边上，它的一边平行于原三角形的斜边．设原三角形的直角边为 a，求证所作等边三角形的面积为 $2a^2\sin 60°\sin^2 15°$。

*79．若 $\triangle ABC$ 的内切圆半径为 r，求证 BC 边上的高

$$AD=\frac{2r\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}}{\cos\dfrac{B+C}{2}}.$$

*80．等腰三角形 ABC 中，$A=100°$，底角 B 的平分线交 AC 于 D，求证 $AD+BD=BC$。

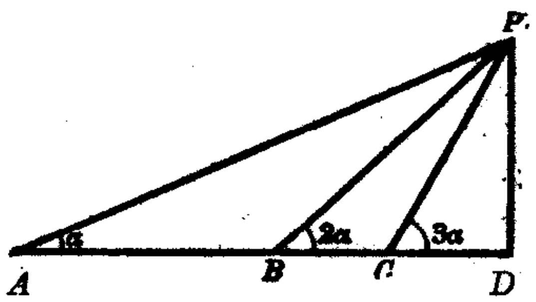
*81．在等腰三角形 ABC 中，已知：$AB=BC=b$，$AC=a$，$\angle ABC=20°$．求证 $a^3+b^3=3ab^2$。

［提示：利用 $\sin 30°=3\sin 10°-4\sin^3 10°$.］

82．用 $\cos 10°$ 表示

$$\cos 10°+\cos 20°+\cos 30°+\cos 40°+\cos 50° +\cos 60°+\cos 70°+\cos 80°.$$

83．某人在 A 处看竿顶的国旗，由 A 向前走 11 m 至 B，由 B 向前走 5 m 至 C，已知在 A, B, C 测得竿顶的仰角分别为 α, 2α, 3α．求旗杆的高度．



（第 83 题）

*84．在 $\triangle ABC$ 中，求证

$$\Delta=4Rr\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}.$$

85．在一角内作互相外切的两个圆，同时这两个圆都与角的两边相切．连结每一个圆与角的两边的切点的弦，依次等于 $2a$ 和 $2b$．求该角．

*86．半径为 R 的圆内一点 P 和圆心的距离为 a，经过 P 点引直径和两条互相垂直的弦，其中一弦和直径成 α 角．求以此两弦为对角线的内接四边形的面积．

*87. 半径 R 和 r 的两圆与直线 AD 切于 A 点，并且位于 AD 的一侧. 一条平行于 AD 的直线交两圆于点 B 和点 C. B, C 位于中心线的一侧. 求 $\triangle ABC$ 的外接圆的半径.

88. 求内接于半径为 10 cm 的圆的五角星形的面积.

89. 已知正 n 边形的一边长是 a, 求它的内切圆半径, 外接圆半径和面积.

*90. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $a\operatorname{tg}A+b\operatorname{tg}B=(a+b)\operatorname{tg}\dfrac{A+B}{2}$，求证原三角形为等腰三角形.

$\left[\text{提示：求证 } \dfrac{a}{b}=\dfrac{\cos A}{\cos B}.\right]$

91. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\sin A:\sin C=\sin(A-B):\sin(B-C)$. 求证 $a^2+c^2=2b^2$.

92. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\dfrac{\operatorname{tg}A-\operatorname{tg}B}{\operatorname{tg}A+\operatorname{tg}B}=\dfrac{c-b}{c}$，求证 $A=60^\circ$.

*93. 已知平行六面体交于一点的棱长为 a, b, c. 其中两棱互相垂直，另一棱与这两棱各成角 α, 求平行六面体的体积.

*94. 直三棱柱的底是一个周长为 $2p$ 的等腰三角形, 每个相等的角为 α. 过下底面等腰三角形的底边以及与上底面相对的顶点引一截面, 截面三角形的底角为 β, 求这个柱体的体积.

*95. 正棱锥的高为 h, 已知它的底面正多边形的内角和为 $n\cdot 90^\circ$, 又知锥体侧面积和底面积的比为 k. 求锥体的体积.

*96. 在球面上一点引三个相等且彼此间的夹角为 2α 的弦. 若球的半径为 R, 求弦长.

*97. 一梯形的上底为 a, 下底为 $2a$, 一腰为 b, 且此腰和下底间的夹角为 α, 求这梯形绕已知腰旋转后所得的体积.

*98. 锥体 $SABC$ 的底是 $\triangle ABC$. AB 和 AC 所成的角为 α, 且 $AB=AC=a$. SBC面垂直于锥体的底, SBA, SCA 面与底成 φ 角. 求锥体的侧面积.

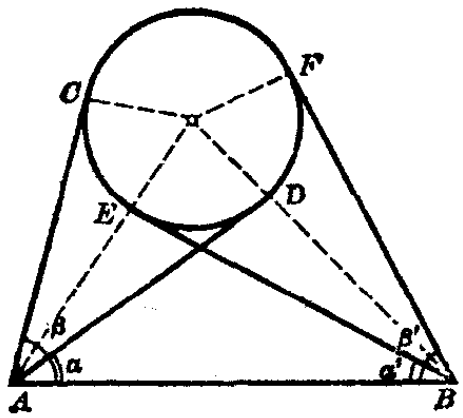
99. 某人向一塔前进，在离塔基 m 处，测得塔顶上旗杆的张角 α 为最大，求证旗杆的长为 $2m\operatorname{tg}\alpha$, 塔高为 $m\operatorname{tg}\left(\dfrac{\pi}{4}-\dfrac{\alpha}{2}\right)$.

[提示：过旗杆的两端和测点所作的圆，与地平线相切于测点.]

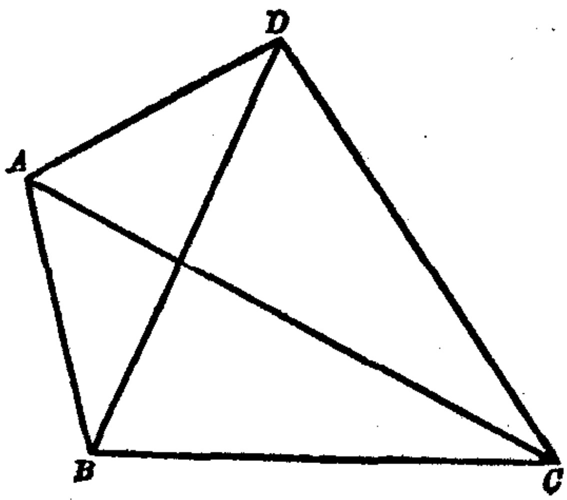
100. 两杆相距12 m，在两杆底部互相测得一杆的仰角为另一杆的仰角的2倍，如果在两杆距离的中点，测得两杆的两个仰角互为余角，求两杆的长.

101. 某人在高处望见正东海面上一船首，它的俯角为 30°，当该船向正南航行 a 浬后，望其船首的俯角为15°，这人的视点高出海面多少？

102. 有一个圆形的水池，设 A, B 为池外的两点，从 A 点测得和圆池相切的视线 AD, AC 与 AB 所成的角是 $\angle DAB=\alpha$, $\angle CAB=\beta$；从 B 点测得和圆池相切的视线与AB所成的角是 $\angle EBA=\alpha'$, $\angle FBA=\beta'$. 如果 $AB=a$, 求水池的半径.



（第102题）



（第104题）

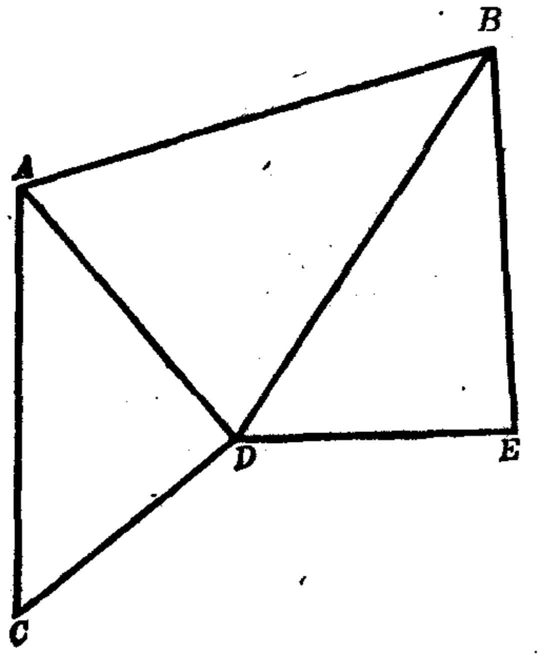
103. 某人在地面上 B 处测得对面山顶 P 的仰角是 65°，向山脚走前 800 m，就走上一个坡度是 30° 的山坡，再走前 800 m，测得 P 的仰角是 78°；求山的高度.

104. 开垦了一块四边形的荒地 $ABCD$，现测得 $AB=187.5$ m，$\angle CAD=56°30'$，$\angle BAC=48°5'$，$\angle ABD=37°30'$，$\angle CBD=65°10'$. 求这块荒地的面积.

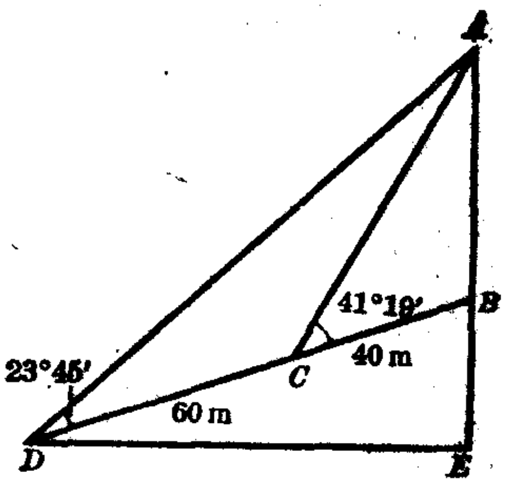
105. 某人在一直向北的路上前进，至某处时见远处两建筑物在同一方向，与路的方向成角 α，再向前行 c 后见两建筑物的张角为 β，且较近建筑物在正东. 求证两建筑物的距离为 $\dfrac{2c\sin\alpha\sin\beta}{\cos(2\alpha+\beta)+\cos\beta}$.

106. 某人测得岩石的仰角为 $47°12'$，依 $32°$ 的斜坡向岩上行 100 m，测得其仰角为 $77°32'$. 求这岩高出第一测点的高度.

107. 有不可到达的 A 与 B 两点，除 D 点外，没有其他的点可望见 A 和 B. 任取一点 C 可望见 A 和 D，测得 CD 为 200 m；$\angle ADC=89°$；$\angle ACD=50°30'$. 又任取一点 E 可望见 D 与 B，测得 DE 为 200 m；$\angle BDE=54°30'$；$\angle BED=88°30'$. 在 D 点测得 $\angle ADB=72°30'$. 求 A 与 B 间的距离.



(第 107 题)



(第 108 题)

108. 在距塔基 40 m 的斜面上，测得塔所张的角为 $41°19'$；更远 60 m 处，测得塔所张的角为 $23°45'$. 求塔高(精确到 0.1 m).

109. 一只船以每小时 15 浬的速度向船坞 A 行驶，于 A 的正西 10 浬处的一点 B 测得此船的方向为东偏北 $42°$. 若这船于三刻钟内抵坞，求初测时与 B 的距离.

110. 由平地上的一点 O 测得山坡上的两点 P 与 Q 的仰角各为 $38°$ 与 $25°$；由 O 至山麓 A 的距离为 500 m，而 AQ 的长为 320 m. 已知各点都在同一铅直面内，求 PQ 的长和山坡的斜度.

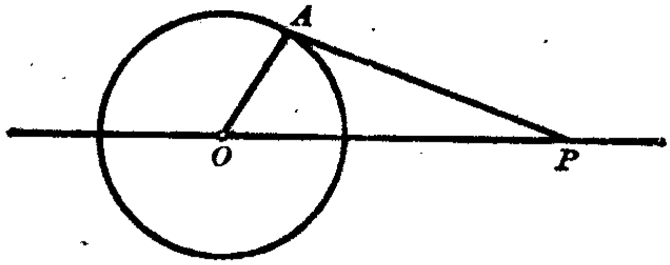
111. 一架飞机以每小时 180 km 的等速度向东飞行，一人见此机在其北而仰角为 $9°30'$. 一分钟后其方向变为北偏东 $62°$. 若此机的高

度为一定，求它的高和第二次观测时的仰角.

*112. 某人在岸上望见海中两浮标在一直线上，此线与海岸线所成的角为 α. 此人沿岸向前走一距离 a，这两浮标对于此人所张的角为 α，再向前走一距离 b，见所张的角仍为 α. 设海岸为一直线，此人的高度不计，求证两浮标间的距离为 $\left(a+\dfrac{b}{2}\right)\sec\alpha-\dfrac{2a(a+b)}{2a+b}\cos\alpha$.

113. 有每边长 80 m 的正三角形地. 今于这三角形中建一塔，由三角形的各顶点测得塔顶的仰角的正切各为 $\sqrt{3}+1$，$\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$. 求塔高.

*114. 在曲柄机构的装置中，OA 为 20 cm 长的曲柄绕 O 而转动；连此曲柄为一 50 cm 长的轴 AP，P 在过 O 的直线上左右移动，当 P 由最远点移至全程的 $\frac{1}{4}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{3}{4}$ 处时，求 OA 与 OP 间所成的角.



(第 114 题)

习 题 答 案

第 一 章

习题1·1　1. 0.7760, 0.6428, 1.1918, 0.8391, 1.5557, 1.3054; 2. $\frac{40}{41}$, $\frac{9}{41}$, $\frac{40}{9}$, $\frac{9}{40}$, $\frac{41}{9}$, $\frac{41}{40}$;　3. $\frac{5}{13}$, $\frac{12}{13}$, $\frac{5}{12}$, $\frac{12}{5}$;

4. $\frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\frac{1}{3}$, $2\sqrt{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{4}$;　5. $\frac{\sqrt{5}}{5}$, $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$, $\sqrt{5}$;

6. $\frac{2mn}{m^2+n^2}$, $\frac{2mn}{m^2-n^2}$, $\frac{m^2+n^2}{m^2-n^2}$;　7. $\frac{2\sqrt{mn}}{m+n}$, $\frac{m-n}{m+n}$, 1.

习题1·2　1. 约30°; 2. 约45°; 5. 约51°; 6. 约51°.

习题1·3　1. 0.4; 2. $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{1}{2}$; 3. sin 19°, tg 44°50′, sec1°.

习题1·4　1. (1) $\frac{6\sqrt{3}-7}{12}$, (2) $\frac{4\sqrt{6}+3}{6}$, (3) $\frac{13}{12}$, (4) 1, (5) 1, (6) 1, (7) 1;　2. (1) 60°, (2) 60°, (3) 45°, (4) 50°; 4. $\sqrt{2}$.

习题1·6　1. (1) 负, (2) 正, (3) 负, (4) 负, (5) 负, (6) 正, (7) 正, (8) 0, (9) 0, (10) 0;　2. (1) $\frac{1}{2}$, (2) 1, (3) 0, (4) 1, (5) 1, (6) $\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

习题1·7(1)　3. 1.

习题1·7(2)　2. 38°58′; 3. 20°19′; 4. 23°25′; 5. 28°23′; 6. $\frac{\sqrt{15}}{4}$, $\sqrt{15}$, $\frac{\sqrt{15}}{15}$.

习题1·8(1)　1. (1) $B=54°25'$, $a=20.37$, $b=28.46$, (2) $A=28°54'$, $a=152.6$, $b=276.4$; 2. 28.21 cm, 20.53 cm;

3. 4.816 m, 6.881 m; 4. 8.668 m; 5. 2.0 m.

习题 1·8 (2) 1. (1) $B=50°45'$, $a=37.28$, $c=58.92$, (2) $A=22°40'$, $a=41.76$, $c=108.4$; 2. $C=35°20'$, $B=72°20'$, $AC=BC=25.41$ cm, $AB=15.44$ cm; 3. $A=49°38'$, $BC=12.72$ cm, $AC=10.81$ cm, $AB=16.69$ cm; 4. 9.96cm; 5. 145.5 m; 6. 60.92 m, 10.09 m.

习题 1·8 (3) 1. (1) $A=B=45°$, $b=50$, (2) $A=73°44'$, $B=16°16'$, $a=24$; 2. 8.961 cm, 8.078 cm, 53°34′; 3. 正十边形, 9.511 cm; 4. 10.66 cm, 17.84 cm.

习题 1·8 (4) 1. (1) $A=30°$, $B=60°$, $c=2\sqrt{5}$, (2) $A=61°55'$, $B=28°5'$, $c=25.51$; 2. 156.5, 9°10′; 3. 8.078, 68°12′; 4. $AB=14.94$ cm, $AC=15.40$ cm, $A=71°35'$, $B=55°25'$, $C=53°$.

复 习 题 一

1. $\frac{7}{25}$, $\frac{24}{25}$, $\frac{7}{24}$, $\frac{24}{7}$, $\frac{25}{24}$, $\frac{25}{7}$; 2. (1) 1, (2) 1, (3) 1; 4. (1) 0, (2) 0, (3) 0; 6. (1) $\frac{7+6\sqrt{6}-4\sqrt{3}}{12}$, (2) $(p-q)^2$, (3) $3\frac{1}{3}$; 7. (1) 70°, (2) 30°, 60°; 13. $(p-q)^2$; 14. $(m-n)^3$; 15. $20\sqrt{3}$ m; 16. 15.75 m; 17. 236.6 m; 18. $133\frac{1}{3}$ m; 19. 48.02 m; 20. $B=56°43'$, $AC=27.33$ cm, $BC=17.95$ cm, $BA=32.70$ cm; 21. $A=48°34'$, $B=41°26'$, $AC=27.20$ cm, $BC=30.81$ cm, $AB=41.11$ cm; 22. 62.43 cm, 9.808 cm; 23. 4.406 cm, 4.531 cm.

第 二 章

习题 2·1 3. $n\cdot360°+90°$, $n\cdot360°+180°$, $n\cdot360°+240°$; 4. $n\cdot360°+270°$, $n\cdot360°+140°$, $n\cdot360°+240°$; 5. 18000°.

习题 2·2　2. (1) 3, (2) 5, (3) $\sqrt{5}|a|$, (4) $5\sqrt{2}$, (5) 3, (6) $\sqrt{5}$;　3. (1) $n\cdot360°+60°$, (2) $n\cdot360°+315°$, (3) $n\cdot360°+210°$, (4) $n\cdot360°+135°$, (5) $n\cdot360°+270°$, (6) $n\cdot360°$, (7) $n\cdot360°+90°$, (8) $n\cdot360°+180°$;　4. 4, -4.

习题 2·3　1. $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$, $\frac{\sqrt{2}}{10}$, -7, $-\frac{1}{7}$, $5\sqrt{2}$, $-\frac{5\sqrt{2}}{7}$;

2. $\frac{\sqrt{2}}{10}$, $-\frac{7\sqrt{2}}{10}$, $-\frac{1}{7}$, -7;　3. $a>0$ 时: $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{5}{4}$;　$a<0$ 时: $-\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{5}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, $-\frac{5}{3}$, $-\frac{5}{4}$;

4. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $-\frac{\sqrt{5}}{5}$, -2, $-\frac{1}{2}$, $-\sqrt{5}$, $\frac{\sqrt{5}}{2}$; $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $\frac{\sqrt{5}}{5}$, -2, $-\frac{1}{2}$, $\sqrt{5}$, $-\frac{\sqrt{5}}{2}$.

习题 2·4　1. (1) cos 120°, tg 120°, ctg 120°, sec 120°, (2) cos 280°, sec 280°, (3) sin 560°, cos 560°, sec 560°, cosec 560°;　2. (1) $90°<\alpha<180°$ 和 $270°<\alpha<360°$, (2) $0<\alpha<90°$ 和 $270°<\alpha<360°$, (3) $180°<\alpha<270°$ 和 $270°<\alpha<360°$;　3. (1) II 和 III, (2) III 和 IV, (3) I 和 III;　5. (1) 负, (2) 正, (3) 负, (4) 正;　6. (1) 0, (2) 0, (3) $n-m$, (4) $(a-b)^2$, (5) $(a-b)^2$, (6) -3.

习题 2·5　2. $\frac{5}{13}$, $-\frac{12}{13}$, $-\frac{5}{13}$, $\frac{12}{13}$;　3. $\pm\frac{24}{7}$.

习题 2·6　1. (1) sin 32°, (2) cos 200°, (3) tg 172°30′, (4) ctg 207°, (5) sec 100°, (6) cosec 227°;　3. (1) sin 160°, (2) cos 245°, (3) tg 305°, (4) ctg 80°, (5) sec 288°, (6) cosec 177°;　4. (1) 0, (2) $-\frac{1}{2}$, (3) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, (4) -1, (5) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, (6) -1.

习题 2·7　1. (1) sin 17°30′, (2) $-$cos 78°, (3) $-$tg 8°55′, (4) $-$tg 4°, (5) $-$sec 39°, (6) cosec 50°, (7) $-$sin 63°,

(8) $-\cos 40°$, (9) $\operatorname{tg} 21°$, (10) $-\operatorname{ctg} 80°$; 2. (1) $-\sin 17°$, (2) $-\cos 37°28'$, (3) $-\cos 25°17'$, (4) $\cos 9°$, (5) $\operatorname{ctg} 29°46'$, (6) $\operatorname{ctg} 41°$, (7) $-\sec 27°$, (8) $\operatorname{cosec} 42°$, (9) $\sin 8°$, (10) $-\sin 10°$; 5. (1) 0.4, (2) -0.4, (3) 0.4; 6. (1) $-1.5-2\sqrt{3}$, (2) 6, (3) $\sqrt{2}-1$, (4) 0.

习题 2·8 1. (1) 1, (2) $\dfrac{-2\sqrt{3}-\sqrt{6}}{2}$, (3) $2\dfrac{1}{3}$; 2. $\dfrac{a^2-b^2}{\sin x}-(a^2+b^2)$; 3. 3; 7. (1) $-150°$, $-30°$, (2) $-300°$, $-120°$, (3) $-315°$, $-45°$.

习题 2·9 1. (1) $n\cdot 360°+90°$, $n\cdot 360°+270°$, (2) $n\cdot 360°+33°50'$, $n\cdot 360°+146°10'$, (3) $n\cdot 360°+135°$, $n\cdot 360°+315°$, (4) $n\cdot 360°+35°45'$, $n\cdot 360°+215°45'$; 2. (1) $n\cdot 360°+188°49'$, $n\cdot 360°+351°11'$, (2) $n\cdot 360°+146°32'$, $n\cdot 360°+213°28'$, (3) $n\cdot 360°+135°14'$, $n\cdot 360°+315°14'$, (4) $n\cdot 360°+47°6'$, $n\cdot 360°+227°6'$; 3. (1) $-\sin\alpha$, (2) $-\sin\alpha$, (3) $-\sin\alpha$, (4) $\operatorname{tg}\alpha$, (5) $-\operatorname{ctg}\alpha$, (6) $\operatorname{cosec}\alpha$; 4. (1) $n\cdot 180°+28°19'$, $n\cdot 180°+61°41'$, (2) $n\cdot 360°+202°56'$, $n\cdot 360°+337°4'$, (3) $n\cdot 360°+40°9'$, $n\cdot 360°+220°9'$, (4) $n\cdot 360°+41°37'$, $n\cdot 360°+221°37'$, $n\cdot 360°+138°23'$, $n\cdot 360°+318°23'$.

习题 2·10 1. (1) $-\sin 43°$, (2) $-\operatorname{tg} 29°$, (3) $-\cos 19°16'$, (4) $\cos 27°$, (5) $-\operatorname{tg} 20°$, (6) $-\sin 40°$, (7) $\operatorname{ctg} 32°$, (8) $\sec 20°$, (9) $\sin 10°$, (10) $-\operatorname{ctg} 10°$; 2. (1) $\dfrac{1}{2}$, (2) $\dfrac{1}{2}$, (3) $-\dfrac{1}{2}$; 3. (1) 0, (2) $2\sin\alpha\cos\alpha$, (3) $\operatorname{tg}\alpha$; 6. (1) $-\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, (2) $-\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$, (3) $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$.

习题 2·11 2. (1) $\sin 100°$, (2) $\sin 107°20'$, (3) $\operatorname{tg} 117°$, (4) $\sin 125°$, (5) $\operatorname{tg} 97°$, (6) $\sin 110°$, (7) $\sec 160°$, (8) $-\operatorname{ctg} 171°$, (9) $\operatorname{cosec} 100°$, (10) $\sin 127°$; 4. (1) $-\cos 10°$, (2) $-\sin 80°$, (3) $-\sin 100°$,

(4) $\cos 190°$, (5) $\sin 280°$.

习题2·12 1. $\frac{7}{25}$, $-\frac{24}{7}$, $-\frac{7}{24}$, $\frac{25}{7}$, $-\frac{25}{24}$; 2. -0.58; 3. $\frac{2}{13}$; 4. 3; 6. $\cos^4\alpha$; 7. (1) $\sin\alpha\cos\alpha$, (2) $\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$, (3) $\sec\alpha\cdot\operatorname{cosec}\alpha$, (4) $\frac{\operatorname{tg}\beta}{\operatorname{tg}\alpha}$; 8. $\frac{a}{2}(3-a^2)$, $\frac{1+2a^2-a^4}{2}$; 9. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$; 10. $\pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$, $\pm\frac{\operatorname{ctg}\alpha}{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}$, $\frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha}$, $\pm\frac{\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}}{\operatorname{ctg}\alpha}$, $\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2\alpha}$.

复 习 题 二

1. (1) $-\cos\alpha$, (2) $-\sin\alpha$, (3) $-\sin\alpha$, (4) $\operatorname{tg}\alpha$, (5) $\sin\alpha$, (6) $\operatorname{tg}\alpha$, (7) $-\operatorname{tg}\alpha$, (8) $-\operatorname{cosec}\alpha$; 3. $\alpha=\beta$, $\alpha+\beta=180°$, $\alpha+\beta=540°$; 4. $\alpha=\beta$, $\alpha\sim\beta=180°$; 6. $\frac{p^2-q^2}{p^2+q^2}$, $\frac{p^2+q^2}{p^2+pq+q^2}$; 8. a^2-2, $a(a^2-3)$; 9. $\frac{1-\operatorname{tg}^8\theta}{\operatorname{tg}^4\theta}$; 10. (1) -2, (2) 0; 12. (1) 正, (2) 负, (3) 正, (4) 负, (5) 正, (6) 正; 13. (1) $\sqrt{3}+\sqrt{2}-1$, (2) $\frac{2\sqrt{3}+3}{6}$, (3) $-2+\sqrt{3}$; 16. $n\cdot 360°+150°$, $n\cdot 360°+210°$; 17. (1) 2, (2) 0.

第 三 章

习题3·1 1. (1) 0.0349, (2) 0.0873, (3) $\frac{\pi}{24}$, (4) $\frac{5\pi}{72}$, (5) $\frac{\pi}{8}$, (6) $\frac{10\pi}{9}$, (7) $\frac{16\pi}{9}$; 2. (1) 27°30′, (2) 0°34′, (3) 151°16′, (4) 108°, (5) 270°, (6) 12°, (7) 18°, (8) 540°; 3. 14.3 cm; 4. 318°20′; 5. 6400 km;

6. 约1391000 km； 7. 65°20′； 8. (1) $\frac{\sqrt{2}}{2}$， (2) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$，

(3) $-\sqrt{3}$， (4) $\frac{\sqrt{3}}{3}$； 10. 约$\frac{44}{45}$寸.

习题3·3 1. (1) 从正数到0的减少， (2) $\sin(-210°)>\sin(-60°)$， (3) 一个值， (4) 无限多个值； 2. (1) 从负数到0的增加， (2) $\frac{2n-1}{2}\pi$， (3) $2n\pi$， $(2n-1)\pi$；

5. (1) $n\pi+\frac{\pi}{2}$， $n\pi$， (2) $n\pi$， $n\pi+\frac{\pi}{2}$， (3) $\operatorname{tg}x$ 增加，$\operatorname{ctg}x$ 减少.

习题3·4 1. (1) $3n\pi<x<3(n+1)\pi$， (2) $2n\pi\leqslant x\leqslant(2n+1)\pi$，
(3) $n\pi-\frac{\pi}{2}<x<n\pi+\frac{\pi}{2}$， (4) $\frac{n\pi}{4}<x<\frac{n+1}{4}\pi$；

2. (1) $x\neq\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{4}$， (2) $x\neq\frac{n\pi}{2}$， (3) $x\neq\frac{n\pi}{4}+\frac{\pi}{8}$，
(4) x可为任何实数； 3. (1) 正确， (2) 失效， (3) 正确，
(4) 正确， (5) 失效， (6) 失效.

习题3·5(1) 1. 偶； 2. 奇； 3. (1) 偶， (2) 偶， (3) 偶，
(4) 都不是， (5) 奇， (6) 奇， (7) 奇， (8) 偶， (9) 都不是，
(10) 奇.

习题3·5(2) 2. (1) 2π， (2) π， (3) $\frac{2\pi}{|a|}$， (4) $|a|\pi$，
(5) 7π， (6) 2π.

习题3·5(3) 1. I, II 象限内递增，III, IV 象限内递减；
2. II, III 象限内递增，I, IV 象限内递减； 3. $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right]$；

4. $\frac{\pi}{2}<\alpha\leqslant\frac{3\pi}{4}$； 5. II, III 象限内递增，I, IV 象限内递减；

6. x在定义域范围内函数都是递减；7. $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{cosec}\alpha$ 递增；$\sin\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$, $\sec\alpha$ 递减.

习题3·5(4) 1. 无界； 2. (2)，(3)以及(5)都不能成立，
(4) 除$a=1$外都不能成立； 3. 有界.

习题3·6　4. $\frac{2\pi}{3}$, 在$\left[\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{18}, \frac{2n+1}{3}\pi+\frac{\pi}{18}\right]$递减;

5. 6π, 在$\left[6n+\frac{\pi}{2}, (6n+3)\pi+\frac{\pi}{2}\right]$递增; 6. 1.

复 习 题 三

1. $\frac{1}{2}\left(1+\frac{\pi}{180}\right)$, $\frac{1}{2}\left(1-\frac{\pi}{180}\right)$; 2. 约 300000 km;

4. (1) $\left(n\pi-\frac{\pi}{2}, n\pi+\frac{\pi}{3}\right)$, (2) $\left[n\pi+\frac{\pi}{4}, n\pi+\frac{3\pi}{4}\right]$;

5. (1) $2n\pi-\frac{\pi}{6}\leqslant x\leqslant 2n\pi+\frac{\pi}{6}$, $0\leqslant y\leqslant\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2}}$, (2) $x\neq n\pi$, $-1\leqslant y\leqslant 1$, (3) $2n\pi-\frac{\pi}{2}<x<2n\pi+\frac{\pi}{2}$, $2\leqslant y<+\infty$;

6. (1) $2n\pi-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2n\pi+\frac{\pi}{2}$, (2) x 可为任何实数, (3) $(2n-1)\pi\leqslant x\leqslant 2n\pi$; 7. (1) $\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, (2) $\frac{\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$, (3) $0\leqslant x<\frac{\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}<x\leqslant 2\pi$; 9. (1) $\frac{2}{|a|}$, (2) 2, (3) $\frac{5}{3}$;

13. 单调减少区间$\left[n\pi-\frac{\pi}{4}, n\pi+\frac{\pi}{4}\right]$, π; 15. (1) 当 $x=\frac{4n\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$ 时有极大值 $3\frac{2}{3}$, 当 $x=\frac{2(2n+1)\pi}{3}-\frac{\pi}{6}$ 时有极小值 $2\frac{1}{3}$, (2) 当 $x=\frac{2n\pi}{3}-\frac{\pi}{12}$ 时有极大值 3, 当 $x=\frac{2n\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ 时有极小值 1;

18. 单调增加区间$\left[2n-\frac{1}{2}, 2n+\frac{1}{2}\right]$ 20. ± 1.1, ± 4.0

第 四 章

习题4·1　1. 0.259; 2. $\frac{3\sqrt{3}+4}{10}$; 3. $\frac{7\sqrt{2}}{26}$; 4. (1) $\frac{1}{2}$, (2) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, (4) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, (5) $-\frac{1}{2}$; 5. $\frac{\sqrt{2}}{2}$;

6. $\frac{56}{65}$, $\frac{33}{65}$; 7. $\frac{15\sqrt{3}-8}{34}$.

习题 4·2 2. $\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$, $-\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; 3. $-\frac{7}{25}$, -1;

4. $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma-\sin\alpha\sin\beta\cos\gamma-\sin\alpha\cos\beta\sin\gamma-\cos\alpha\sin\beta\sin\gamma$, $\sin\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos\alpha\sin\beta\cos\gamma+\cos\alpha\cos\beta\sin\gamma-\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma$.

习题 4·3 1. $2+\sqrt{3}$, $-(2-\sqrt{3})$; 2. (1) 1, (2) $\sqrt{3}$, (3) $\sqrt{3}$, (4) $-\sqrt{3}$, (5) $\frac{\sqrt{3}}{3}$; 7. $\frac{1-q}{p}$.

习题 4·4 1. $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$, $\frac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2})$, $2-\sqrt{3}$;

2. (1) $\frac{1}{2}$, (2) $\frac{\sqrt{2}}{2}$, (3) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, (4) 0, (5) 1, (6) 0;

4. -1, $\frac{1}{7}$; 6. $\frac{\pi}{4}$.

习题 4·5 1. (1) $\frac{\sqrt{3}}{2}$, (2) $\frac{3}{4}$, (3) $\sqrt{3}$, (4) $\frac{\sqrt{3}}{4}$,

(5) $\frac{1}{2}$, (6) 0.8897; 2. $\frac{17}{32}$, $-\frac{7\sqrt{15}}{32}$, $-\frac{7\sqrt{15}}{17}$;

3. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1; 6. (2) $\frac{\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{5\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}\leqslant\alpha\leqslant\frac{7\pi}{4}$,

(3) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}$; 7. 0.936, 0.352, 2.659; 9. $\frac{527}{625}$, $\frac{10296}{11753}$.

习题 4·6 1. $\pm\frac{5}{13}$, $\pm\frac{12}{13}$, $\pm\frac{5}{12}$; 2. $-\frac{1}{3}$; 3. $\frac{4}{5}$, $\frac{3}{5}$;

4. -2; 6. $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{3}}$, $\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

习题 4·7 1. (1) $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$, (2) $-\frac{1}{4}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$,

(3) $\frac{\sqrt{3}+1}{2}$;　2. (1) $\sin 4\theta+\sin 2\theta$,　(2) $\cos 2x-\sin 4x$,

(3) $-\frac{1}{2}(\sin x+\cos 3x)$,　(4) $\cos 2x$.

习题 4·8　1. (1) $-2\sin 5\theta\sin\theta$,　(2) $\cos 7\theta\cos 2\theta$,

(3) $2\sqrt{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$,　(4) $4\cos\theta\sin\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$,

(5) $2\cos^2 10^\circ$,　(6) $4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\beta+\gamma}{2}\cos\frac{\gamma+\alpha}{2}$;

2. (1) $\frac{4\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(\alpha-\frac{\pi}{6}\right)}{\sin^2\alpha}$,　(2) $\frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\cos\beta}$,

(3) $\frac{2\cos\left(45^\circ+\frac{x}{2}\right)\sin\left(45^\circ-\frac{x}{2}\right)}{\cos x}$,　(4) $\frac{\sin\beta}{\cos\alpha}$,

(5) $\frac{\sqrt{2}\cos\left(45^\circ-\frac{\alpha}{2}\right)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$;　3. (1) $\operatorname{tg}2A$,　(2) $\operatorname{tg}2\alpha$,　(3) $\operatorname{tg}3x$,

(4) $\frac{\sin 3A}{\sin 5A}$,　(5) $\operatorname{tg}\theta$;　4. (1) $\frac{\sqrt{6}}{2}$,　(2) 0,　(3) 0,

(4) $\frac{1}{16}$.

习题 4·9　1. $\sqrt{2}\sin(45^\circ+x)$;　2. $-2\cos(x+30^\circ)$;

3. $\sqrt{2}\sin x$;　4. $\sqrt{2}\cos x$;　5. $17\sin(x+61^\circ 56')$.

复 习 题 四

1. $-\frac{\sqrt{6}}{4}$,　$\frac{40\sqrt{6}}{71}$;　2. $\frac{m(3n^2-m^2)}{m^2+n^2}$;　3. $\frac{2}{11}$;

5. (1) 0,　(2) $\frac{1}{2}$,　(3) $-\frac{1}{8}$;　6. $\sqrt{\frac{4-a^2-b^2}{a^2+b^2}}$;

7. $a\sqrt{\frac{a+b}{b-a}}$;　10. q.

第 五 章

习题5·3 1. (1) $C=75°$, $b=35.46$, $c=53.29$, (2) $A=34°10'$, $a=2402$, $b=4211$, (3) $C=55°$, $a=56.10$, $b=70.74$, (4) $A=67°$, $b=11.82$, $c=14.19$; 2. $2:\sqrt{6}:1+\sqrt{3}$; 3. 0.4044 m; 4. 233.3; 6. 1.000 km, 1.219 km.

习题5·4 1. (1) 有二解, (2) 有一解, (3) 有一解, (4) 无解, (5) 无解; 2. 在 $\triangle AB_1C_1$ 中, $B_1=66°10'$, $C_1=58°26'$, $c_1=18.63$, 在 $\triangle AB_2C_2$ 中, $B_2=113°50'$, $C_2=10°46'$, $c_2=4.079$; 3. $C=53°19'$, $A=17°41'$, $a=7.508$; 4. 无解; 5. 无解; 6. $B=90°$, $C=53°$, $c=15.97$; 7. 120.3 m; 8. 124.6 cm.

习题5·5 8. $A=120°$.

习题5·6 1. (1) $A=119°54'$, $B=31°6'$, $c=52.60$, (2) $B=74°38'$, $C=37°4'$, $a=192.7$, (3) $A=49°4'$, $C=79°7'$, $b=104.1$; 2. $592.8m$; 3. 204; 4. m^2+3n^2; 5. 4.927 km.

习题5·7 1. (1) 45°, 60°, 75°, (2) 130°42′, 23°27, 25°51′; 2. 120°; 3. 90°; 4. 30°; 5. 104°29′; 7. 117.55 cm; 8. 86°25′, 58°49′, 93°35′, 121°11′.

复 习 题 五

1. (1) $B=65°32'$, $b=447.4$, $c=425.7$, (2) $A_1=70°12'$, $B_1=57°24'$, $b_1=28.79$, $A_2=109°48'$, $B_2=17°48'$, $b_2=10.45$, (3) $A=54°30'$, $B=47°48'$, $b=50.54$, (4) $B=30°3'$, $C=90°$, $b=5.008$, (5) 无解; 5. 6.857 cm; 9. $27(3-\sqrt{3})$m, $27(\sqrt{6}-\sqrt{2})$m; 12. 41 km; 13. $\dfrac{a\sin\beta}{\cos(2\alpha+\beta)}$.

第 六 章

习题6·1 3. (1) 11°45′, 78°16′, (2) 119°22′, (3) 17°34′,

$77°34'$, (4) $8°32'$, $278°32'$; 4. $n\cdot360°\pm68°56'$; 5. $n\cdot90°+4°15'$.

习题 6·2 1. 49.45; 2. 1.037; 3. −0.1020; 4. 68°; 5. $50°49'$; 6. $65°22'$; 7. 4.423; 8. −2.261; 9. −0.5603.

习题 6·3 1. $B=22°50'$, $a=370.5$, $b=156.0$; 2. $A=43°41'$, $a=0.5961$, $c=0.8632$; 3. $A=68°26'$, $b=0.3245$, $c=0.8827$; 4. $A=43°23'$, $B=46°37'$, $a=63.54$; 5. $A=22°13'$, $B=67°47'$, $c=11.27$; 6. 50.68 m; 7. 12.49 cm; 8. 28.33 秒.

习题 6·4 1. $C=55°20'$, $b=567.6$, $c=664.0$; 2. $C=33°27'$, $a=1943$, $b=3394$; 3. 48.2 cm, 21.2 cm; 4. 4.607 km, 4.150 km; 5. 46.05 m; 6. 28.06 cm.

习题 6·5 1. $B_1\doteq59°21'$, $B_2=120°39'$, $C_1=73°14'$, $C_2=11°56'$, $c_1=7.884$, $c_2=1.702$; 2. $A=32°40'$, $C=109°12'$, $c=0.2159$; 3. 无解; 4. $B=30°3'$, $C=90°$, $b=5.009$; 5. 249.24 cm; 6. 42.85 cm.

习题 6·6 1. $40°54'$, $19°6'$; 2. $108°26'$, $18°26'$; 3. (1) $\frac{2}{5}$.

习题 6·7 1. $A=57°31'$, $C=82°47'$, $b=452.3$; 2. $A=90°59'$, $B=9°48'$, $c=87.23$; 3. 304.6 cm, 476.6 cm; 4. 61.6 cm; 5. 148.9 cm; 6. 19.25 cm.

习题 6·9 1. $A=18°12'$, $B=135°51'$, $C=25°57'$; 2. $A=54°32'$, $B=82°52'$, $C=42°36'$; 3. 117.6 cm; 4. 60°; 5. $76°39'$.

习题 6·10 1. 5113 平方单位; 2. 70.52 平方单位; 3. 931.0 cm^2; 4. 488.4 m^2; 5. 215.9 cm^2.

习题 6·11 4. 20.6 cm; 5. 192.6, 5974 平方单位; 6. 10.43 cm.

习题 6·12 2. 4.77 cm.

复习题六

1. 1.377; 2. 12.18; 3. $68°9'$; 4. $1°57'$; 5. (1) 181.1, 236.7, (2) 525.8, 661.3, (3) $41°30'$, 48.04, (4) $24°39'$, 4.68; 6. 27.8 cm; 7. 14.8 cm, 17.2 cm; 8. $A=130°38'$,

$B=41°21'$, $C=8°1'$, $a=558.6$, $b=486.4$, $c=102.6$; 9. $b=449.0$, $c=496.2$; 10. $62°31'$ 与 $102°18'$, $117°29'$ 与 $47°20'$; 11. 5.988km 和 2.671 km; 12. 5926; 13. 21.1 m; 14. 9.73, 6.86; 15. 183.4cm; 16. 129.4 m; 17. $B=32°39'$, $C=115°53'$, $a=500.3$, $\Delta=116400$; 18. $A=126°43'$, $B=39°36'$, $a=1195$, $b=952$, $\Delta=134600$ 平方单位.

第 七 章

习题 7·1 2. (1) $x=\frac{y+\pi}{\sqrt{2}}$, (2) $x=\sqrt[3]{\frac{y-7}{3}}$, (3) $x=\log_2(y-3)$, (4) $x=10^y-\sqrt{5}$; 3. $x=-\sqrt{y}$.

习题 7·2 1. (1) $\frac{\pi}{4}$, (2) 0, (3) $-\frac{\pi}{2}$, (4) $-15°30'$; 2. (1) $\arcsin\frac{\sqrt{3}}{4}$, (2) $\arcsin 0.8715$, (3) $\arcsin(-0.3)$, (4) $\arcsin\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$; 3. (1) $\frac{\pi}{3}$, (2) 0, (3) $\frac{\pi}{9}$, (4) 0, (5) $\frac{\pi}{2}$, (6) $-\frac{\pi}{12}$; 4. (1) 0.8239, (2) $\frac{\sqrt{7}}{5}$, (3) -0.1221, (4) $-\frac{\sqrt{3}}{4}$; 6. $\arcsin\frac{a}{c}$, $\arcsin\frac{b}{c}$; 7. (1) $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$, (2) $[0, 1]$, (3) $[0, 1]$, (4) $|x|>1$.

习题 7·3 1. (1) $\frac{\pi}{4}$, (2) $59°10'$, (3) $149°31'$, (4) $\frac{3\pi}{4}$; 2. (1) $\arccos\frac{1}{3}$, (2) $\arccos 0.3179$, (3) $\arccos\left(-\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, (4) $\arccos\left(-\frac{2}{3}\right)$, (5) $\arccos\frac{2ab}{a^2+b^2}$; 3. (1) 0.7717, (2) $\frac{12}{13}$, (3) 1, (4) $-\frac{\sqrt{2}}{3}$, (5) -0.5; 4. (1) $\frac{9\pi}{4}$, (2) π, (3) $-\frac{2\pi}{3}$, (4) 0, (5) π; 5. (1) $\frac{\pi}{2}$, (2) 0,

(3) $\frac{\pi}{2}$, (4) 0; 8. $0\leqslant a\leqslant 2$; 9. (1) $[-3, 3]$, $[0, \pi]$, (2) $[1, 2]$, $[0, \pi]$, (3) $[-1, 1]$, $\left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$.

习题 7·4 1. (1) $\frac{\pi}{3}$, (2) $-\frac{\pi}{6}$, (3) $-\frac{\pi}{4}$, (4) 0, (5) $64°53'$, (6) $-44°17'$; 2. (1) $\operatorname{arctg}\frac{7}{5}$, (2) $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$, (3) $\operatorname{arctg}(-\pi)$, (4) $\operatorname{arctg}\frac{b}{a}$, (5) $\operatorname{arctg}\left(-\frac{a+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$; 3. (1) 1.412, (2) $\frac{\sqrt{5}}{2}$, (3) -2, (4) -1.142, (5) $\frac{2a}{b}$; 4. (1) $\frac{\pi}{2}$, (2) π, (3) 0, (4) 0, (5) 0; 5. $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}$, $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}}$, $\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}$; 7. (1) $x\geqslant 5$, (2) $x\neq 1$ 的实数, (3) $|x|\geqslant 2$.

习题 7·5 1. (1) $\frac{\pi}{6}$, (2) $\frac{3\pi}{4}$, (3) $\frac{\pi}{2}$, (4) $50°36'$, (5) $152°55'$, (6) $\frac{2\pi}{3}$; 2. (1) $\operatorname{arcctg}\frac{\sqrt{5}}{7}$, (2) $\operatorname{arcctg}\left(-\frac{1}{3}\right)$, (3) $\operatorname{arcctg}\frac{1}{5}-\frac{\pi}{3}$, (4) $\frac{1}{2}\operatorname{arcctg}(-\sqrt{2})-\frac{\pi}{8}$, (5) $2\operatorname{arcctg}\frac{2}{3}$; 3. (1) $\frac{3\pi}{2}$, (2) $\frac{\pi}{2}$, (3) $\frac{\pi}{2}$, (4) $\frac{7\pi}{6}$, (5) $\frac{\pi}{6}$; 5. (1) $\frac{\pi}{2}$, (2) $\frac{\pi}{2}$, (3) $\frac{\pi}{2}$, (4) $\frac{\pi}{2}$; 6. $(-\pi, \pi)$, $(0, 2\pi)$; 7. (1) 1.3, (2) 不存在, (3) -1, (4) 不存在, (5) 不存在; 8. $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1; 9. (1) $x>0$, (2) $x\geqslant 0$.

习题 7·6 1. (1) $\frac{1}{2}$, (2) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, (3) 0, (4) 1,

(5) $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$; 3. $\frac{2a^2S}{a^4-S^2}$; 4. 1; 5. $\frac{33}{65}$; 6. 0;

7. $-\sqrt{3}$。

习题 7·7 1. (1) 0, (2) π。

复习题七

1. (1) $\frac{2}{\sqrt{5}+1}$, (2) $\frac{3}{5}$, (3) $\frac{\sqrt{10}}{10}$, (4) 0;

2. $2\arcsin\frac{2d}{p}$; 3. $\arccos\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$; 11. (1) 0, (2) $\frac{1}{5}$;

12. (1) $\frac{3}{5}$, (2) $\frac{\sqrt{3}}{3}$, (3) $\sqrt{3}$; 13. 0; 14. $\frac{\sqrt{10}}{2}$;

15. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{7}}$。

第 八 章

习题 8·1 1. $-3\leqslant a\leqslant 1$; 2. $|a|>1$; 3. $a=-1$; 4. $a\neq 1$;

5. $a=b$ 时 $x=2n\pi+\frac{\pi}{2}$, $a\neq b$ 时无解; 6. $2n\pi+\frac{\pi}{3}$, $(2n+1)\pi-\frac{\pi}{3}$;

7. $2n\pi\pm\arccos 0.7342$; 8. $2n\pi-\frac{\pi}{4}$, $(2n+1)\pi+\frac{\pi}{4}$;

9. $n\pi-\frac{\pi}{6}$; 10. $n\pi+\frac{\pi}{6}$。

习题 8·2 1. $\frac{n\pi}{2}$; 2. $\frac{2n\pi}{5}+\frac{\pi}{30}$, $\frac{(2n+1)\pi}{5}+\frac{\pi}{10}$;

3. $(6n-1)120^\circ\pm 270^\circ$; 4. $\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{24}$, $\frac{n\pi}{2}-\frac{7\pi}{24}$;

5. 无解; 6. $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$; 7. $\frac{n\pi}{2}\pm\frac{\pi}{8}$; 8. $\frac{n\pi}{3}$; 9. $n\pi$。

习题 8·3 1. $2n\pi+\frac{\pi}{2}$; 2. $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$; 3. $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$;

4. $2n\pi$, $4n\pi+\frac{\pi}{3}$, $(4n+2)\pi-\frac{\pi}{3}$; 5. $4n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$; 6. $(2n+1)\pi$;

7. $2n\pi$, $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$;　8. $n\pi+\frac{\pi}{4}$, $n\cdot180°+53°8'$;　9. $n\pi+\frac{\pi}{4}$;

10. $n\pi$, $2n\pi\pm\frac{\pi}{4}$, $2n\pi\pm\frac{3\pi}{4}$;　11. $2n\pi$;　12. $\frac{2n\pi}{5}\pm\frac{\pi}{10}$;

13. $2n\pi$;　14. $n\pi$.

习题 8·4　1. $n\pi$;　2. 无解;　3. $n\pi\pm\frac{\pi}{4}$, $n\pi$;　4. $n\pi$;

5. $n\pi+\frac{\pi}{2}$, $2n\pi-\frac{\pi}{6}$, $(2n+1)\pi+\frac{\pi}{6}$;　6. $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$;　7. $n\pi$;

8. $n\pi$, $2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$;　9. $n\pi-\frac{\pi}{4}$;　10. $2n\pi$, $2n\pi-\frac{\pi}{2}$;

11. $2n\pi$, $\frac{1}{9}(2n+1)\pi$;　12. $n\pi+\frac{\pi}{2}$, $\frac{n\pi}{4}$;

13. $\frac{1}{5}\left(n\pi-\frac{\pi}{4}\right)$, $\frac{1}{10}\left(n\pi+\frac{\pi}{4}\right)$;　14. $\frac{n\pi}{2}$, $2n\pi+\frac{\pi}{6}$, $2n\pi+\frac{5\pi}{6}$;

15. 无解;　16. $n\pi$, $n\pi-\frac{\pi}{4}$;　17. $n\pi+\frac{\pi}{2}$, $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$.

习题 8·5　1. $2n\pi$, $2n\pi+\frac{\pi}{2}$;　2. $2n\pi+\frac{\pi}{6}\pm\frac{\pi}{3}$;

3. $2n\pi+\frac{5\pi}{12}$, $(2n+1)\pi-\frac{\pi}{12}$;　4. $2n\pi-\frac{\pi}{4}$;　5. $2n\pi-\frac{\pi}{3}$, $2n\pi+\frac{\pi}{2}$;　6. $2n\pi$, $2n\pi-\frac{\pi}{2}$;　7, $n\cdot360°+46°24'$, $n\cdot360°+90°$;

8. $(2n+1)\pi$, $2n\pi+\frac{\pi}{2}$;　9. $36°52'$, $53°8'$.

习题 8·6　1. $n\pi-\frac{5\pi}{12}$;　2. $n\cdot180°+54°44'$;　3. $n\cdot180°+63°26'$, $n\cdot180°+56°19'$;　4. $n\cdot180°+45°$, $n\cdot180°+26°34'$;

5. $2n\pi\pm\frac{\pi}{2}$, $n\pi+\frac{\pi}{4}$;　6. $4n\pi\pm\pi$, $2n\pi+2\operatorname{arc\,tg}\frac{b}{2a}$;

7. $n\pi+\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}\right)$;　8. $n\cdot360°+143°8'$, $n\cdot360°-112°37'$;　9. $n\cdot36°+9°$, $n\cdot36°+1°37'$;

10. $n\pi-\frac{\pi}{4}$, $n\cdot180°+78°41'$.

习题 8·7　1. (1) 一个, (2) 两个;　2. 0;　3. $-\frac{\pi}{2}$;

4. $n\pi, n\pi\pm\frac{\pi}{4}$;　5. 0.97.

复习题八

1. (1) 无解，　(2) 无解，　(3) 无解，　(4) 无解；

2. (1) $|a|\geqslant\sqrt{2}$，　(2) $|a|\leqslant\frac{1}{2}$，　(3) $|a|\leqslant\sqrt{2}$，

(4) $-3\leqslant a<-1$，　$-1<a\leqslant 1$；　3. $2n\pi+\frac{\pi}{10}$，$(2n+1)\pi-\frac{\pi}{10}$，

$2n\pi-\frac{3\pi}{10}$，　$(2n+1)\pi+\frac{3\pi}{10}$；　4. $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$；　5. $2n\pi+\frac{\pi}{6}$，

$(2n+1)\pi-\frac{\pi}{6}$，　$n\pi+\frac{\pi}{2}$，　$2n\pi\pm\frac{2\pi}{3}$；　6. $n\pi+\frac{\pi}{2}$，　$n\pi\pm\frac{\pi}{6}$；

7. $\frac{n\pi}{3}$；　8. $n\pi+\frac{5\pi}{12}$，　$n\pi+\frac{\pi}{12}$；　9. $n\pi+\frac{\pi}{2}$，　$(2n+1)\pi$，

$(4n+1)\frac{\pi}{6}$；　10. $n\pi+\frac{3\pi}{4}$，　$n\pi+\frac{2\pi}{3}$，　$2n\pi-\frac{\pi}{12}$，$(2n+1)\pi-\frac{5\pi}{12}$；

11. $\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{36}-\frac{1}{6}\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}$，　$\frac{n\pi}{2}+\frac{\pi}{8}+\frac{1}{4}\operatorname{arc\,tg}\frac{4}{3}$；

12. $n\pi+\frac{\pi}{2}$，　$n\pi+\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2}$；　13. $2n\pi$，　$2n\pi-\frac{\pi}{2}$，　$n\pi-\frac{\pi}{4}$；

14. $x=n_1\pi\pm\frac{\pi}{12}$，　$y=n_2\pi\pm\frac{\pi}{6}$；

15. 当 $\frac{-1-\sqrt{13}}{2}\leqslant m\leqslant\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$ 时才有解，　$x=n\pi+\frac{\pi}{4}$，

$x=n\cdot 180^\circ-78^\circ 41'$；　16. $75^\circ 31'$，　$28^\circ 58'$；　17. 30°，　60°；

18. 15°，　75°；　19. $19^\circ 6'$，　$40^\circ 54'$；　20. 1.07，　-3.23；

21. 1.17.

总复习题

1. (1) $2n\pi+\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant 2n\pi+\frac{3\pi}{2}$，　(2) $\frac{n\pi}{2}<x<\frac{(n+1)\pi}{2}$，

(3) $2n\pi-\frac{5\pi}{4}\leqslant x\leqslant 2n\pi+\frac{\pi}{4}$，　(4) $\frac{n\pi}{3}<x<\frac{n\pi}{3}+\frac{\pi}{6}$，

(5) $n\pi < x < n\pi + \frac{\pi}{4}$, $n\pi + \frac{\pi}{4} < x < n\pi + \frac{\pi}{2}$, $n\pi + \frac{\pi}{2} < x < (n+1)\pi$,

(6) $2n\pi + \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant 2n\pi + \frac{5\pi}{4}$;　3. (1) 第四象限，(2) 第一、四象限，(3) 第二象限；　4. (1) $\cos 10°$，(2) $-\sin 36°$，(3) $-\operatorname{tg} 16°14'$，(4) $\operatorname{ctg} 42°$，(5) $-\sec 33°$，(6) $-\sec 10°$;

5. (1) 1，(2) 当 n 为偶数时等于 $2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$，当 n 为奇数时等于 $-2\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)$，(3) $\sec^2\alpha$，(4) 0，(5) 0；　6. (1) $2\sqrt{3}$，

(2) $\frac{-5\sqrt{2}}{2}$，(3) 0，(4) $-2a^2$；　7. (1) 4，(2) 10π，

(3) 1；　9. ± 3；　10. $1\frac{11}{13}$；　11. $\frac{12}{13}$；　12. $\pm\frac{3}{5}$，$\pm\frac{4}{5}$；

13. (1) $\frac{1}{4}(\sqrt{2}+1)$，　(2) $\frac{1}{4}(\sqrt{2}+1)$，　(3) $\frac{3}{4}$；

21. (1) $4\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$，(2) $-\cos(\alpha-\beta)\cos(\alpha+\beta)$，

(3) $\sin 25° \sin 30° \operatorname{cosec} 5°$，　(4) $2\sqrt{3}\sin 20° \sin 40°$；

26. (1) $2n\pi \leqslant x \leqslant (2n+1)\pi$，　(2) $(4n-1)\pi \leqslant x \leqslant (4n+1)\pi$，

(3) $2n\pi - \frac{\pi}{4} \leqslant x \leqslant 2n\pi + \frac{3}{4}\pi$，　(4) $x \neq 2n\pi$；

27. (1) $2n\pi - \frac{\pi}{2} < \alpha < 2n\pi + \frac{\pi}{2}$，(2) $(2n-1)\pi < \alpha < 2n\pi$，

(3) $n\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < (n+1)\pi$，　(4) $2n\pi + \frac{\pi}{2} < \alpha < (2n+1)\pi + \frac{\pi}{2}$；

28. $\frac{17}{25}$；　29. (1) 1，(2) 1，(3) $-\sqrt{3}$；　30. $-\frac{1}{3}$ 或 $\frac{1}{2}$；

31. $\frac{3\sqrt{10}}{10}$，$\frac{1}{3}$；　32. 振幅是 6，周期是 π；　38. 1.862 km；

39. 17.45 m；　41. 约 $2°23'$；　42. $5400°$，30π；　43. 100π，15.7 米/秒；　44. (1) $\frac{4\pi}{5}$，(2) $\frac{24}{25}$，(3) $\frac{1}{5}$，(4) $\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{13}}{13}$；

45. $\frac{\sqrt{3}}{3}$；　46. $\frac{x^2}{x^2-2}$；　47. $\frac{11\sqrt{130}}{130}$；　48. $-\frac{\pi}{4}$；

50. $a<0$, $a>0$, $a=0$; 53. (1) 0, $\frac{\sqrt{7}}{4}$, $-\frac{\sqrt{7}}{4}$, (2) $\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, $-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}$, (3) 0, $\frac{1}{2}$, $-\frac{1}{2}$, (4) 没有解; 54. (1) $x=\pm\frac{(4n+1)\pi}{2}$, (2) $x=\frac{\pi}{2}(2n+1)$, (3) $x=\pm\sqrt{2n\pi}$ n 取非负的整数; 55. $n\cdot 90°+42°30'$;

56. $\frac{n\pi}{2}$, $\frac{(2n+1)\pi}{8}$; 57. $\frac{15\pi}{32}(4n+1)$; 58. $\frac{\pi}{2}(2n+1)$, $n\pi+\frac{\pi}{12}$, $\frac{(2n+1)\pi}{2}-\frac{\pi}{12}$; 59. $\frac{\pi}{4}(2n+1)$, $n\pi\pm\frac{\pi}{6}$;

60. $\frac{\pi}{12}(8n+3)$; 61. $\frac{\pi}{16}(4n-1)$, $\frac{\pi}{4}(8n\pm 1)$;

62. $2n\pi$, $n\pi+\frac{\pi}{4}$; 63. $\frac{\pi}{2}(3n\pm 1)$; 64. $n\pi+\frac{1}{2}\arcsin(4-2\sqrt{3})$, $\frac{(2n+1)\pi}{2}-\frac{1}{2}\arcsin(4-2\sqrt{3})$; 65. $\frac{n\pi}{3}$, $\frac{\pi}{11}(2n+1)$;

66. $n\pi+\frac{\pi}{4}$, $n\pi\pm\frac{\pi}{3}$; 67. $2n\pi\pm\frac{\pi}{3}$; 68. $\frac{\pi}{10}(2n+1)$, $\frac{\pi}{4}(2n+1)$, $\frac{\pi}{2}(2n+1)$; 69. $n\cdot 60°$;

70. $\begin{cases} x=n\pi+\frac{\pi}{6}, \\ y=-n\pi+\frac{\pi}{6}; \end{cases}$ 71. $\begin{cases} x=(n+m)\pi\pm\frac{\pi}{3}, \\ y=(n-m)\pi\pm\frac{\pi}{3}; \end{cases}$

72. $\begin{cases} x=(4n+1)45°, \\ y=(1-6n)30°; \end{cases}$ $\begin{cases} x=(6n+1)30°, \\ y=(1-4n)45°; \end{cases}$

73. $p=-\frac{5}{6}$, $q=\frac{1}{6}$; 或 $p=5$, $q=6$;

82. $(\sqrt{3}+1)\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1+\cos 10°}\right)$; 83. 8.8 m; 85. $2\arcsin\frac{b-a}{b+a}$;

86. $2\sqrt{R^4-a^2R^2+\frac{1}{4}a^4\sin^2 2\alpha}$; 87. $\sqrt{Rr}$;

88. $500\ \mathrm{tg}\ 36°\cos 72°\ \mathrm{cm}^2$; 89. $\frac{a}{2}\mathrm{ctg}\frac{180°}{n}$, $\frac{a}{2}\mathrm{cosec}\frac{180°}{n}$,

$\frac{na^2}{4}\operatorname{ctg}\frac{180°}{n}$; 93. $abc\sqrt{-\cos 2a}$(因 $2a>90°$, 所以 $-\cos 2a>0$);

94. $\frac{p^3\sin 2\alpha\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}}{16\cos^6\frac{\alpha}{2}\cos\beta}$; 95. $\frac{(n+4)h^3}{6(k^2-1)}\operatorname{tg}\frac{360°}{n+4}$;

96. $\frac{4R}{\sqrt{3}}\sqrt{\sin(60°+\alpha)\sin(60°-\alpha)}$; 97. $\frac{7}{3}\pi a^2 b\sin^2\alpha$;

98. $\frac{a^2\sin\alpha}{2\cos\varphi}\left(\sin\frac{\alpha}{2}\sin\varphi+1\right)$; 100. 9 m 和 4 m;

101. $\frac{a}{4}\sqrt{2(\sqrt{3}-1)}$浬; 102. $r=\frac{a\sin\frac{1}{2}(\alpha'+\beta')\sin\frac{1}{2}(\beta-\alpha)}{\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta+\alpha'+\beta')}$;

103. 5547 m; 104. 55100 m^2; 106. 103.68 m; 107. 345.4 m;
108. 56.6 m; 109. 16.47 浬; 110. 329 m, 66°20′;
111. 266.9 m, 4°30′; 113. 80 m; 114. 49°27′, 78°28′, 110°29′.